Dynamique des structures

Régime libre de l'oscillateur élémentaire

Pr. Karim Houmy
Département Energie et Agroéquipement
IAV Hassan II

Etude des systèmes à 1 ddl

- Le régime libre est décrit par la solution de l ’équation homogène suivante :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$\mathrm{u(t)} = Ce^{st}$$

La constante C a pour dimension L et st n’a pas de dimension donc s est de dimension T^{-1}

Posons $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ $\xi = \dfrac{c}{2m\omega}$

L’équation (1) devient $\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Remplaçant

$$\mathrm{u(t)} = Ce^{st} \qquad \text{dans} \qquad m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)Ce^{st} = 0$$

Cette équation est valide pour toute valeur de t si

$$\underline{(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2\ ) = 0}$$

Appelée équation caractéristique

Etude des systèmes à 1 ddl

- **Régime conservatif : oscillateur harmonique (c = 0)**

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) = 0 \qquad \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

$$(s^2 + \omega^2) = 0$$

D'où $s = \mp i\omega$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

Après substitution des racines dans l'équation précédente nous obtenons

$$u(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_1 e^{-i\omega t}$$

On peut écrire l'équation sous forme:

$$u(t) = A\, cos\omega t + B\, sin\omega t$$

Composantes du mouvement harmonique

On peut écrire l'équation sous forme:

$$u(t) = A\ cos\omega t + B\ sin\omega t$$

Où A et B sont des réels

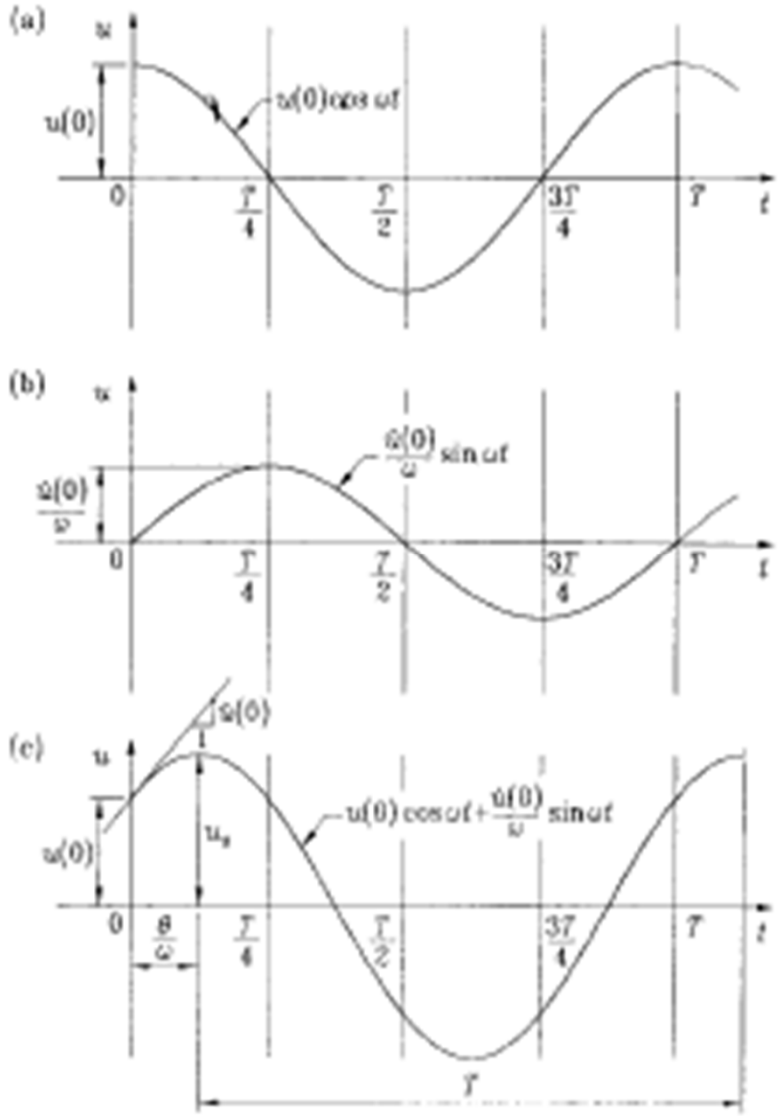
Avec les conditions initiales t= 0 nous avons u(0) et $\dot{u}(0)$

$$A = u(o)\ et\ B = \frac{\dot{u}(0)}{\omega}$$

$$u(t) = u(0)\ cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} sin\omega t$$

Composantes du mouvement harmonique

$$u(t) = u(0)\, cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} sin\omega t$$



Le système décrit un cycle d'oscillation $\omega t = 2\pi$

T est la période propre en s avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

F la fréquence propre f=1/T en Hz (cycle par seconde)

Autre représentation de la solution

$$u(t) = u(0)\, cos\omega t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega} sin\omega t$$

$$u(t) = u_0(t)\cos(\omega t - \theta)$$

$$u_0 = \sqrt{u(0)^2 + (\frac{\dot{u}(0)}{\omega})^2}$$

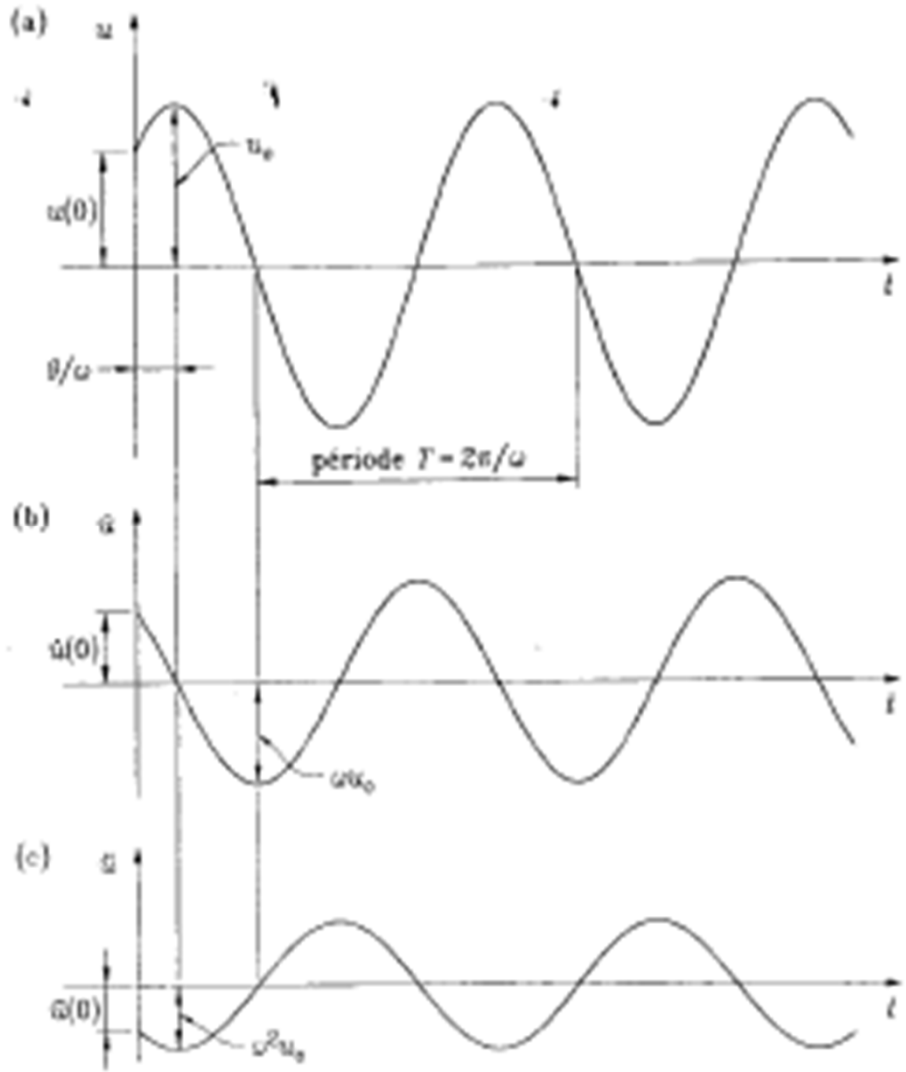
$$\theta = tan^{-1}(\frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)})$$

$$u(t) = u_0(t)\cos(\omega t - \theta)$$

$$\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{u}(t) = \omega^2 u_0 \cos(\omega t - \theta + \pi)$$

La vitesse et l'accélération sont respectivement en quadrature et en opposition de phase avec le déplacement



Etude des systèmes à 1 ddl

- **Régime libre dissipatif**

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2\ ) = 0$$

Deux solutions $s_1 = -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ $\quad s_1 = -\xi\omega - \ \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$

Trois types de mouvement sont possibles dépendant de la quantité d'amortissement dans le système, ou dépendant de la valeur $\zeta^2 - 1$

1. Mouvement oscillatoire quand $\xi < 1$; $s_1 et\ s_2$ sont des complexes
2. Mouvement non oscillatoire quand $\xi = 1$; $s_1 et\ s_2$ sont réels et égaux
3. Mouvement non oscillatoire quand $\xi > 1$; $s_1 et\ s_2$ sont réels distincts

La bifurcation entre un mouvement oscillatoire et un mouvement non oscillatoire correspond à $\xi = 1$.

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$C_{cr} = 2m\omega = \frac{2k}{\omega} = 2\sqrt{km}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega}$$

Et $\xi = \frac{C}{C_{cr}}$ est le taux d'amortissement critique. On utilise en général le terme court de taux d'amortissement

Etude des systèmes à 1 ddl

- **Régime libre dissipatif**

Amortissement sous critique

$\xi < 1; s_1 et\ s_2$ sont des complexes

$$s = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \qquad s_1 = -\xi\omega + i\omega_D \qquad s_2 = -\xi\omega - i\omega_D$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

Où ω_D est la pulsation propre amortie. La solution générale est donnée par l'équation :

$$\mathrm{u(t)} = G_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + G_2 e^{-\xi w t - i\omega_D t}$$

On peut l'écrire sous la forme suivante

$$\mathrm{u(t)} = e^{-\xi\omega t}(G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

Dans laquelle les constantes G1 et G2 sont complexes. Elles sont de plus des conjugués puisque u(t) est réel.

Etude des systèmes à 1 ddl

- **Régime libre dissipatif**

Amortissement sous critique

$$\mathrm{u(t)} = e^{-\xi\omega t}(G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t})$$

De même cette équation peut s'écrire

$$\mathrm{u(t)} = e^{-\xi\omega t}(Acos\omega_D t + Bsin\omega_D t)$$

A et B sont des réels. La vitesse est obtenue par dérivation

$$\dot{u}(\mathrm{t}) = -e^{-\xi\omega t}[(\xi\omega A + \omega_D B)cos\omega_D t + (\xi\omega B - \omega_D A)sin\omega_D t]$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

  Amortissement sous critique

Pour les conditions initiales $u(0)\ et\ \dot{u}(0)$, on déduit les constantes A et B

$$A = u(0), \text{ et } B = \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D}$$

Tenant compte de A et B, le déplacement u(t) s'exprime

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}(u(0)cos\omega_D t\ +\ \frac{\xi\omega u(0)+\dot{u}(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t)$$

Et l'expression de la vitesse est

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi\omega t}(\dot{u}(0)cos\omega_D t\ -\ \frac{\xi\omega\dot{u}(0)+\omega^{\dot{2}}u(0)}{\omega_D}\sin\omega_D t)$$

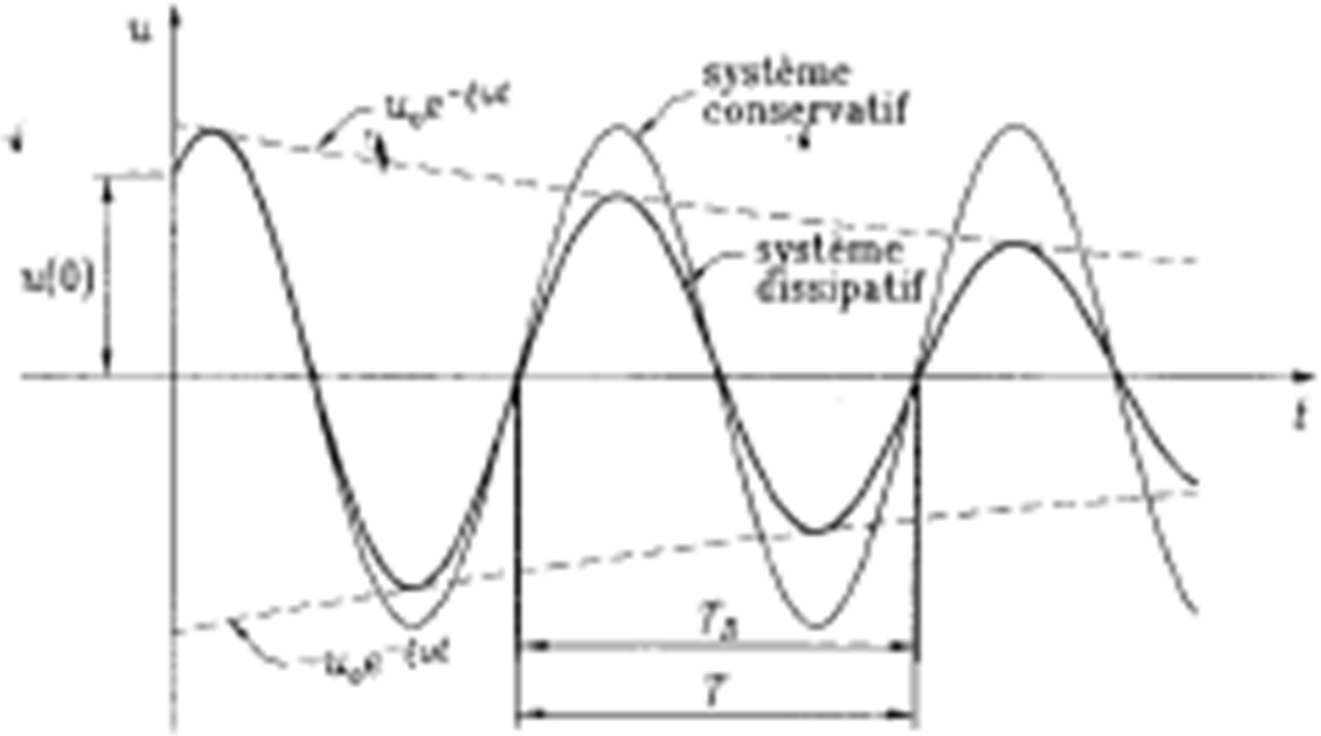
Etude des systèmes à 1 ddl

- **Régime libre dissipatif**

  Amortissement sous critique

De même cette équation peut s'écrire $u(t) = u_0 e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta)$

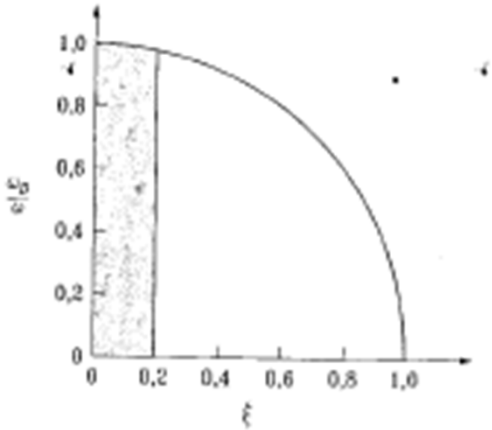
$$u_0 = \sqrt{(u(0)^2 + \left(\frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D}\right)^2} \qquad \theta = tan^{-1}(\frac{\xi\omega + \dot{u}(0)}{\omega_d u(0)})$$



Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

$\frac{\omega_D}{\omega}$ en fonction ξ est cercle de rayon 1 $\frac{\omega_D}{\omega} = \sqrt{1-\xi^2}$



$0 < \xi < 0{,}20$ des taux d'amortissement des structures de génie civil

ξ^2 est négligeable par rapport à 1 et la pulsation ω_D peut être confondue avec ω

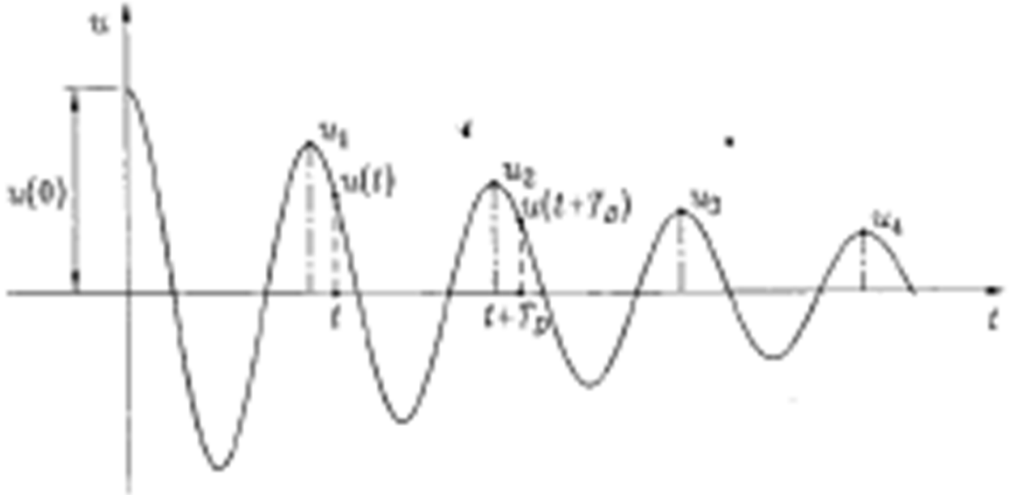
Par exemple pour $\xi = 0{,}10, \omega_D = 0{,}995\omega \; et \; T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{T}{\sqrt{1-\xi^2}} = 1{,}005\, T$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

Décrément logarithmique

$$u(t) = u_0 e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta)$$



$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \frac{u_0 e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t - \theta)}{u_0 e^{-\xi\omega(t+T_D)}\cos(\omega_D(t+T_D) - \theta)}$$

mais

$$\cos(\omega_D(t+T_D) - \theta) = \cos\big((\omega_D t - \theta) + \omega_D T_D\big) = \cos\big((\omega_D t - \theta) + 2\pi\big) = \cos(\omega_D - \theta)$$

Donc l'équation précédente devient

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \frac{e^{-\xi\omega t}}{e^{-\xi\omega(t+T_D)}} = e^{\xi\omega T_D}$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \frac{e^{-\xi\omega t}}{e^{-\xi\omega(t+T_D)}} = e^{\xi\omega T_D}$$

Décrément logarithmique

$$\frac{\omega_D}{\omega} = \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\delta \equiv ln\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \xi\omega T_D = 2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Où la quantité δ est appelée décrément logarithmique.

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}$$

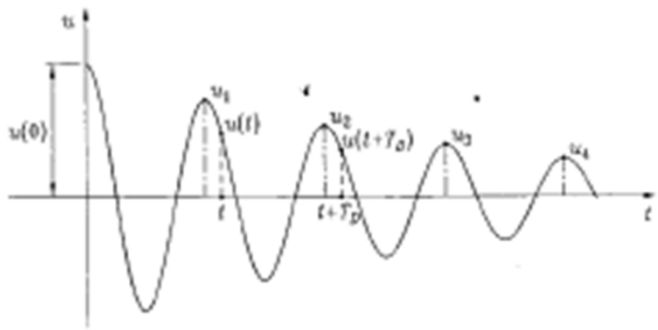
Pour des valeurs faibles d'amortissement $\omega \approx \omega_D$, est une approximation de δ est donnée par

$$\delta \approx 2\pi\xi$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

Décrément logarithmique



$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = \frac{u_n}{u_{n+1}}\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \ldots\ldots \frac{u_{n+m-1}}{u_{n+m}} = \left(e^{\xi\omega T_D}\right)^m = e^{m\xi\omega T_D}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+m}} = e^{m\delta} \longleftarrow \delta \equiv ln\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \xi\omega T_D = 2\pi\xi\frac{\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta \approx 2\pi\xi$$

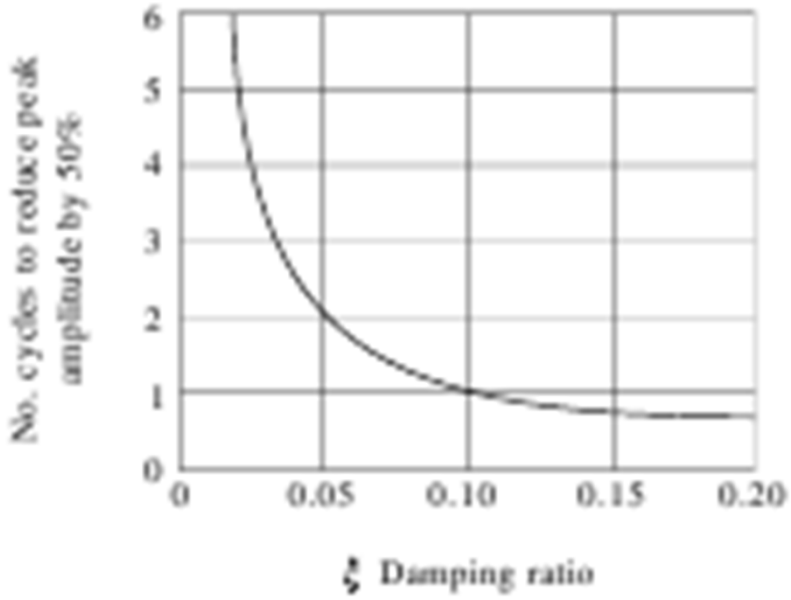
$$\delta = \frac{1}{m} ln\frac{u_n}{u_{n+m}} \longrightarrow \xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2m\pi} ln\frac{u_n}{u_{n+m}}$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

Décrément logarithmique

Le nombre de cycles nécessaires pour réduire l'amplitude de 50 % a été calculé en posant $\frac{u_n}{u_{n+m}} = 2$ et sa relation en fonction du taux ξ d'amortissement est représentée dans la figure ci-dessous



$$\xi \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2m\pi} ln \frac{u_n}{u_{n+m}}$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

  Amortissement critique

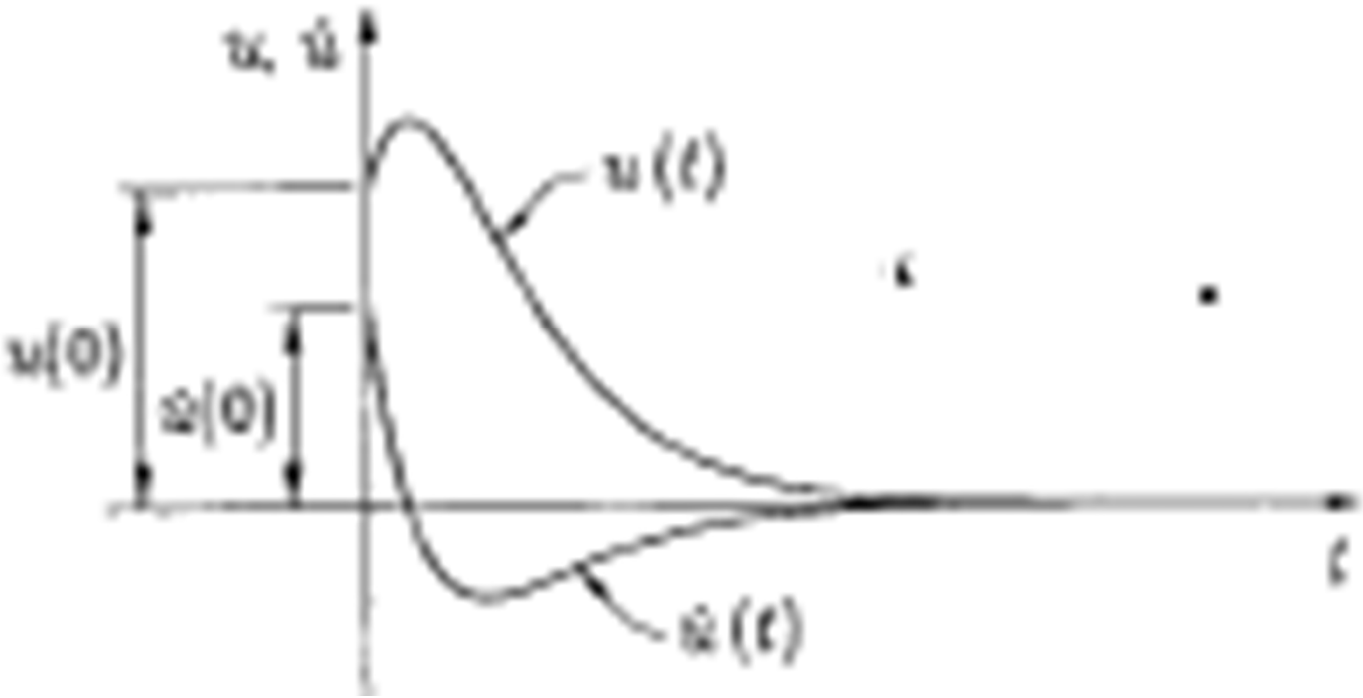
  Les conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$ permettent de déterminer les constantes

$$G_1 = u(0), \qquad G_2 = \omega u(0) + \dot{u}(0)$$

  Après substitution de ces constantes dans les équations et on obtient

$$u(t) = (u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t)e^{-\omega t}$$

$$\dot{u}(t) = (\dot{u}(0)(1 - \omega t) - \omega^2 u(t)t)e^{-\omega t}$$



Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

Amortissement surcritique

L'amortissement est dit surcritique quand le taux d'amortissement ξ et plus grand que l'unité $\xi > 1$. Les racines de l'équation réelles et distinctes

$$s_1 = -\xi\omega + \widehat{\omega} \quad s_2 = -\xi\omega - \widehat{\omega}$$

$$\widehat{\omega} = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Les deux racines $s_1 et\ s_2$ sont négatives et on a les deux solutions particulières

$$u_1(t) = e^{-(\xi\omega - \widehat{\omega})t} \qquad u_2(t) = e^{-(\xi\omega + \widehat{\omega})t}$$

Ces solutions sont linéairement indépendantes car $\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = e^{-2\widehat{\omega}t} \neq constante$. La solution générale s'écrit

$$\mathrm{u}(t) = e^{-\xi\omega t}\left(Ae^{\widehat{\omega}t} + Be^{-\widehat{\omega}t}\right) = e^{-\xi\omega t}(A_1 cosh\widehat{\omega}t + B_1 sinh\widehat{\omega}t)$$

$A_1 = A + B et B_1 = A - B$

La vitesse est obtenue par dérivation

$$\dot{u}(t) = -e^{-\xi\omega t}((\xi\omega A_1 - \widehat{\omega}B_1)cosh\widehat{\omega}t + (\xi\omega B_1 - \widehat{\omega}A_1)sinh\widehat{\omega}t)$$

Pour les conditions initiales $u(0) et\ \dot{u}(0)$

$$A_1 = u(0)\ \ et\ B_1 = \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\widehat{\omega}}$$

Etude des systèmes à 1 ddl

- Régime libre dissipatif

Amortissement surcritique

En tenant compte de , le déplacement $u(t)$ peut donc s'écrire

$$u(t) = e^{-\xi wt}(u(0)cosh\widehat{\omega t} + \frac{\xi\omega u(0) + \dot{u}(0)}{\widehat{\omega}} sinh\widehat{\omega} t)$$

Et la vitesse s'exprime

$$\dot{u}(t) = e^{-\xi wt}(\dot{u}(0)cosh\widehat{\omega t} - \frac{\xi\omega\dot{u}(0) + \omega^2 u(0)}{\widehat{\omega}} sinh\widehat{\omega} t)$$

Les fonctions trigonométriques sont remplacées par des fonctions hyperboliques. Les graphes des fonctions $u(t) et\ \dot{u}(t)$ sont montrés à la figure . Ces fonctions sont apériodiques et il n'y a pas d'oscillations par rapport à la position d'équilibre.

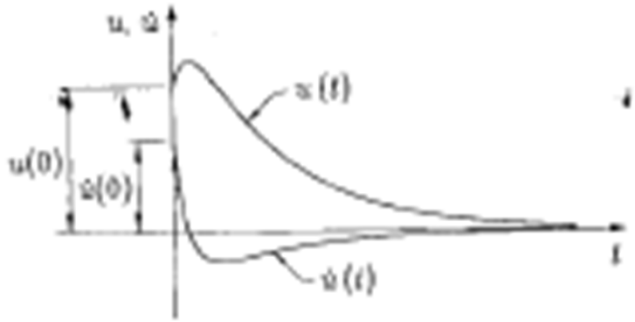
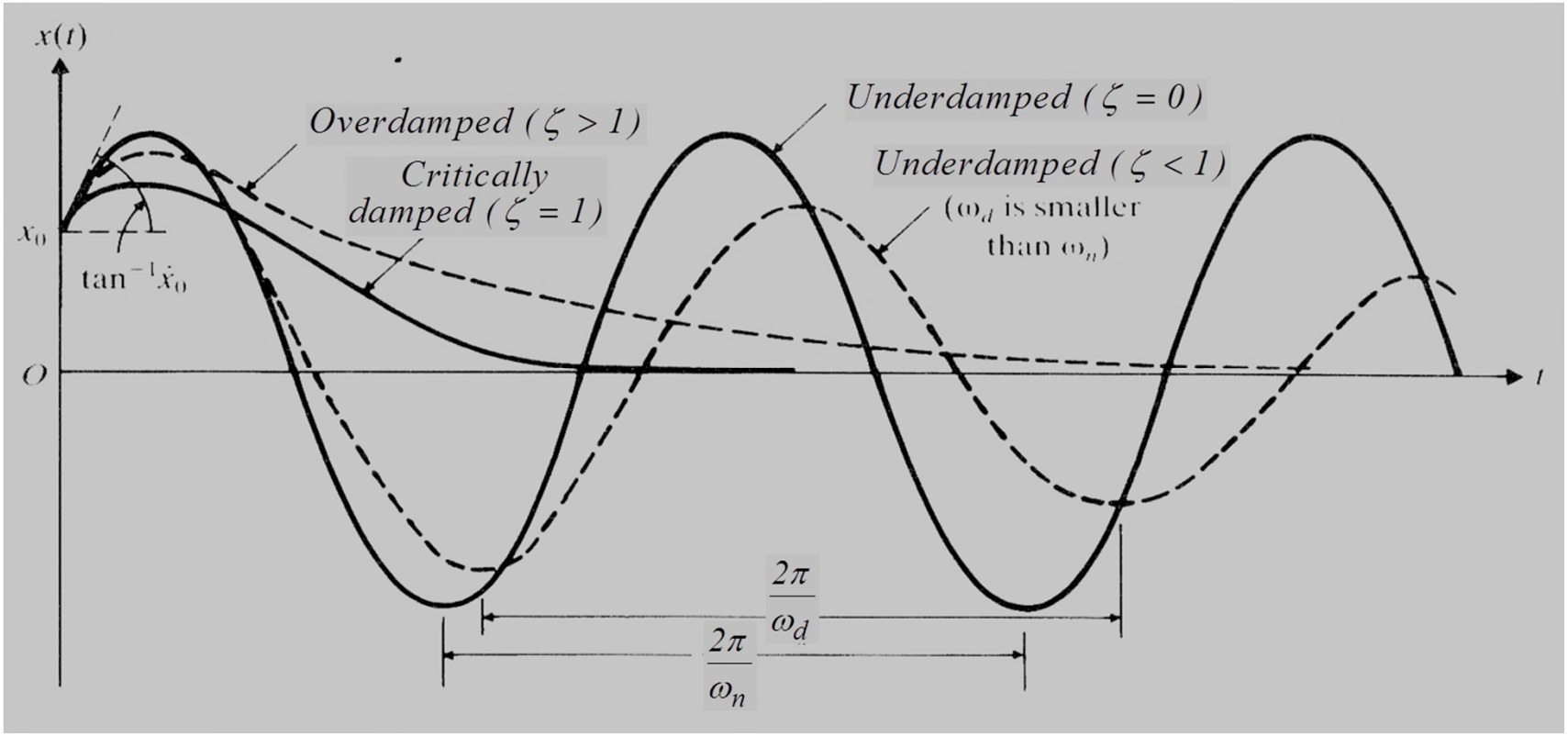


Figure 3.10. *Variation du déplacement et de la vitesse d'un oscillateur élémentaire avec amortissement surcritique*

Les trois situations en fonction du taux d'amortissement