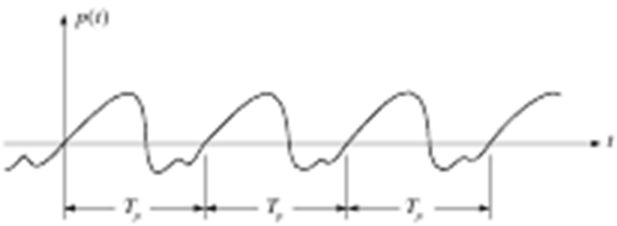
Dynamique des structures

Chargement périodique

Pr. Karim Houmy
Département Energie et Agroéquipement
IAV Hassan II

Expression des chargements périodiques



Considérons une fonction périodique quelconque p(t) (voir figure). La période est fonction de

$$p(t + n\bar{T}) = p(t), \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Notons $\bar{\omega}$ la pulsation de p(t) . On peut écrire $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\bar{T}}$

La fonction périodique p(t) peut être développée en la série de fonctions trigonométriques suivantes dite série de Fourier

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega})\, t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\bar{\omega})\, t$$

La pulsation $\bar{\omega}$ est appelée pulsation fondamentale et les pulsations $n\bar{\omega}$ sont appelées harmoniques pour $n \geq 2$.

Expression des chargements périodiques

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{\bar{T}} p(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{\bar{T}} p(t)\, cosn\bar{\omega}tdt \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{\bar{T}} p(t)\, sinn\bar{\omega}tdt \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

Ces trois coefficients sont connus sous le nom de formule d'Euler ou formule d'Euler Fourier.
Le coefficient a_0 est la moyenne de p(t).

Expression des chargements périodiques

En combinaisons les cosinus et les sinus de même fréquence, l'équation $p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\overline{\omega})\, t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\overline{\omega})\, t$ peut se mettre sous forme

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cos(n\overline{\omega} t - \varphi_n)$$

Ou $p_0 = a_0 et\ p_n$est l'amplitude de la nième harmonique

$$p_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

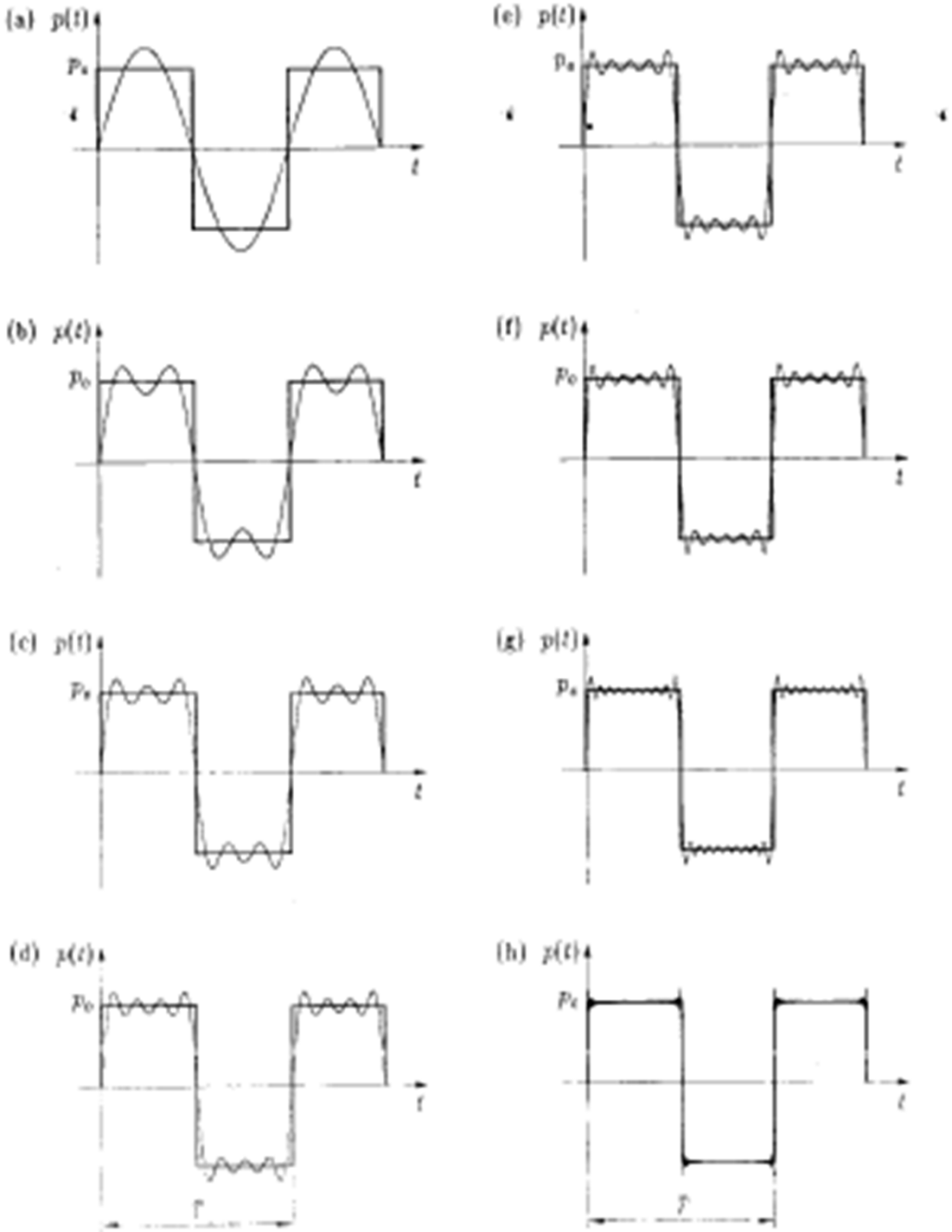
Et $\varphi_n$est l'angle de phase

$$\varphi_n = tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

On peut écrire également

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin(n\overline{\omega} t + \gamma_n) \qquad \gamma_n = tan^{-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$$

Application numérique



Formation progressive du signal carrée pour (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 , (e) 5, (f) 6, (g) 10 et (h) 50 termes

Exemple (cas du (b))

$$p(t) = \frac{4p_0}{\pi}(sin\overline{\omega}t + \frac{1}{3}sin3\overline{\omega}t\ )$$

Réponse à un chargement périodique

Chargement harmonique

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\overline{\omega}t$$

Chargement périodique

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\overline{\omega})\, t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\overline{\omega})\, t$$

Principe de superposition (équation linéaire)

La réponse d'un système élémentaire linéaire a un chargement périodique peut être obtenue en superposant les réponses du système à chaque harmonique du développement en série de Fourier du chargement.

Réponse à un chargement périodique (Régime conservatif)

La réponse d'un système élémentaire à une charge constante p_0 s'exprime

$$u(t) = \frac{p_0}{k}$$

Rappel

Solution pour un régime forcé conservatif sollicitation en sinus

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)(sin\overline{\omega}t - \beta sin\omega t) \quad \beta \neq 1$$

Solution pour un régime forcé conservatif sollicitation en cosinus

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)(cos\overline{\omega}t - cos\omega t) \quad \beta \neq 1$$

La réponse de l'oscillateur conservatif à un chargement décomposé en série de Fourier est donné par les sommes suivantes

$$\beta_n = \frac{n\overline{\omega}}{\overline{\omega}} = n\beta$$

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{1-\beta_n^2}(a_n cosn\,\overline{\omega}t + b_n sinn\overline{\omega}t - a_n cos\omega t - b_n\beta_n sin\omega t)$$

Réponse à un chargement périodique (Régime dissipatif)

La réponse d'un système élémentaire à une charge constante p_0 s'exprime

$$u(t) = \frac{p_0}{k}$$

Rappel

Solution pour un régime forcé dissipatif (fonction sinus)

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta cos\bar{\omega}t)$$

Solution pour un régime forcé dissipatif (fonction cosinus)

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}(2\xi\beta sin\bar{\omega}t + (1-\beta^2)cos\bar{\omega}t)$$

La réponse de l'oscillateur dissipatif à un chargement décomposé en série de Fourier est donné par les sommes suivantes :

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\zeta\beta_n)^2}[(a_n(1-\beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n)cosn\bar{\omega}t + (a_n 2\xi\beta_n + b_n(1-\beta_n^2)sinn\bar{\omega}\ ]$$