Dynamique des structures

Régime forcé harmonique

Pr. Karim Houmy
Département Energie et Agroéquipement
IAV Hassan II

Régime forcé conservatif

Le régime forcée harmonique est le comportement de l'oscillateur élémentaire soumis à l'action d'une force extérieure harmonique pure

L'équation du mouvement est la forme

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\overline{\omega}t$$

La solution de cette équation est la somme de la solution complémentaire $u_c(t)$ de l'équation homogène avec p(t) = 0 et de la solution particulière de l'équation non homogène, donc liée à la charge p(t) soit

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

Régime forcé conservatif

Le régime forcé est conservatif quand c=0. L'équation du mouvement devient :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\overline{\omega}t$$

La solution complémentaire est la réponse en régime conservatif libre

$$u_c(t) = Acos\omega t + Bsin\omega t$$

Cherchons une solution particulière de la forme

$$u_p(t) = Csin\overline{\omega}t$$

Nous supposons donc que le mouvement est harmonique, de même fréquence que la force extérieure harmonique et en phase avec elle.

De plus, nous supposons que la pulsation naturelle du système ω n'est pas présenté dans l'expression de la solution particulière.

$$\ddot{u}_p(t) = -\overline{\omega}^2 Csin\overline{\omega}t$$

Régime forcé conservatif

$$u_p(t) = Csin\overline{\omega}$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\overline{\omega}^2 Csin\overline{\omega}t$$

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p_0 sin\overline{\omega}t$$

$$-m\overline{\omega}^2 Csin\overline{\omega}t + kCsin\overline{\omega}t = p_0 sin\overline{\omega}t$$

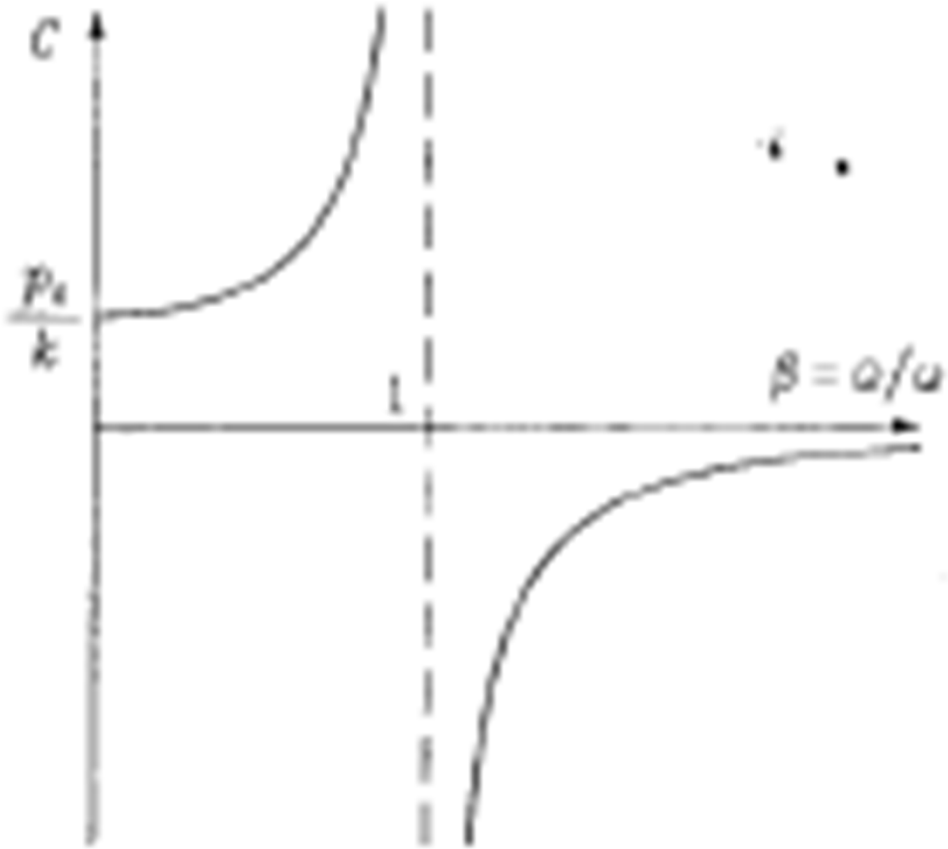
$$C = \frac{p_0}{k - m\overline{\omega}^2} = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1 - \frac{m\overline{\omega}^2}{k})} = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1 - \frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2})}$$

Dans laquelle on a tenu compte du fait que $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Définissons la pulsation relative

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega}$$

$$C = \frac{p_0}{k}\frac{1}{1 - \beta^2}$$

Régime forcé conservatif



Régime forcé conservatif

La solution générale de l'équation s'écrit

$$u(t) = A\,cos\omega t + B\,sin\omega t + \frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}sin\bar{\omega}t$$

Et la vitesse s'obtient par dérivation de

$$\dot{u}(t) = -\omega A\,sin\omega t + \omega B\,cos\omega t + \bar{\omega}\frac{p_0}{k}\frac{1}{1-\beta^2}cos\omega t$$

Pour des conditions initiale = t = 0 au repos, c'est-à-dire $u(0) = 0\ et\ \dot{u}(0) = 0$ on déduit les constantes d'intégration A et B

A = 0 $\qquad B = -\frac{p_0}{k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\beta$

La solution complète devient

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)(sin\bar{\omega}t - \beta sin\omega t) \quad \beta \neq 1$$

Où

$\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)$ = amplitude dynamique

$\frac{p_0}{k} = u_{st0}$ = déplacement dû à l'amplification statique de la force p_0

$sin\bar{\omega}t$ = composante du déplacement total ayant la fréquence de la charge appliquée, appelée aussi régime forcé harmonique

$\beta sin\omega t$ = composante du déplacement total ayant la fréquence naturelle du système, appelée aussi régime libre transitoire

Régime forcé conservatif

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)(sin\overline{\omega}t - \beta sin\omega t) \quad \beta \neq 1$$

$$\mathrm{R}(t) = \left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)(sin\overline{\omega}t - \beta sin\omega t) \quad \beta \neq 1$$

Pour $\beta = 1, R(t) = \frac{0}{0}$. On peut cependant calculer le déplacement u(t) par la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Donc, après avoir remplacé $\overline{\omega}\ par\ \beta\omega$, nous obtenons

$$\lim_{\beta\to 1} R(t) = \lim_{\beta\to 1}\left[\frac{\omega t cos\beta\omega t - sin\omega t}{-2\beta}\right] = \frac{1}{2}(sin\omega t - \omega t cos\omega t)$$

Régime forcé conservatif

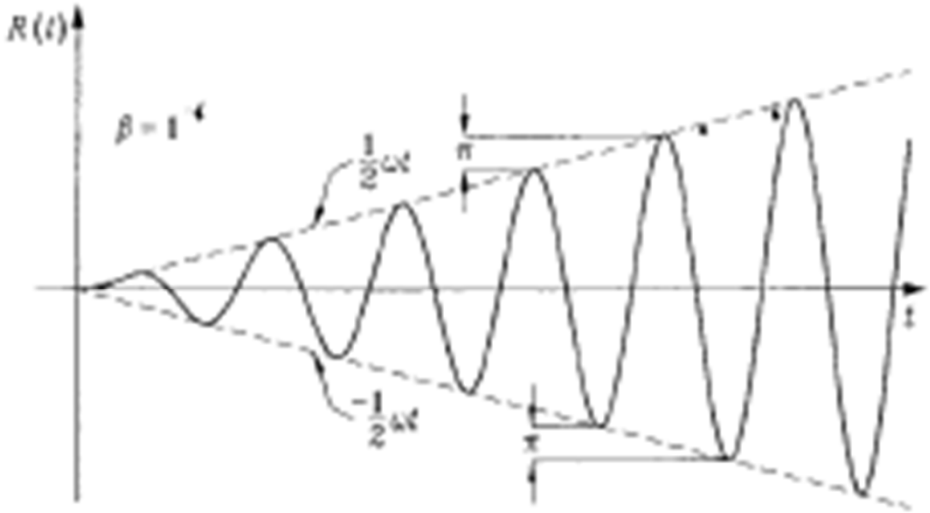


Figure 4.5. *Variation du facteur de réponse dynamique R(t) en fonction du temps à la résonance*

Régime forcé dissipatif

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_0}{m} sin\overline{\omega}t$$

Dont la solution complémentaire est la réponse en régime dissipatif libre de l'équation homogène sans second membre

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega t}\,(Acos\omega_D t + Bsin\omega_D t)$$

. Nous cherchons une solution particulière de la forme

$$u_p(t) = G_1 cos\overline{\omega}t + G_2 sin\overline{\omega}t$$

Où il est nécessaire d'avoir deux constantes d'intégration parce que, dans le cas d'un système amorti, il a en général deux inconnues, l'amplitude et l'angle de phase. La vitesse est obtenue par dérivation

$$\dot{u}_p(t) = -\overline{\omega}G_1 sin\overline{\omega}t + \overline{\omega}G_2 cos\overline{\omega}t$$

Et l'accélération s'exprime

$$\ddot{u}_p(t) = -\overline{\omega}^2 G_1 cos\overline{\omega}t - \overline{\omega}^2 G_2 sin\overline{\omega}t$$

$$(-\overline{\omega}^2 G_1 + G_2\overline{\omega}(2\xi\omega) + G_1\omega^2)cos\overline{\omega}t + (-G_2\overline{\omega}^2 - G_1\overline{\omega}(2\xi\omega) + G_2\omega^2)sin\overline{\omega}t = \frac{p_0}{m} sin\overline{\omega}t$$

Régime forcé dissipatif

Par identification des termes en $sin\overline{\omega}t$ et $cos\overline{\omega}t$ on obtient les deux équations suivantes :

$$(G_2(\omega^2 - \overline{\omega}^2) - G_1\overline{\omega}(2\xi\omega))sin\overline{\omega}t = \frac{p_0}{m}sin\overline{\omega}t$$

$$(G_1(\omega^2 - \overline{\omega}^2) + G_2\overline{\omega}(2\xi\omega))cos\overline{\omega}t = 0$$

D'où on obtient les constantes G_1 et G_2

$$G_1 = \frac{p_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \qquad G_2 = \frac{p_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

La solution complète est la somme de la solution complémentaire et de la solution particulière et est donnée par :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\,(Acos\omega_D t + Bsin\omega_D t) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta cos\overline{\omega}t)$$

Où le premier terme correspond au régime transitoire qui disparaît rapidement à cause du terme $e^{-\xi\omega t}$ et le deuxième terme correspond au régime libre permanent. Les constantes A et B de la partie transitoire de la réponse totale peuvent être évaluées pour des conditions initiales données.

Régime forcé dissipatif

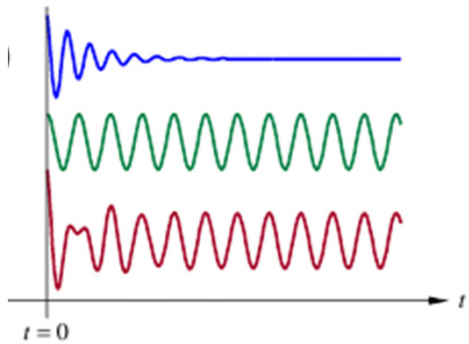
Soient $u(0)$ et $\dot{u}(0)$ le déplacement initial et la vitesse initiale, les constantes A et B valent :

$$A = \frac{p_0}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} + u(0) \qquad B = \frac{p_0}{k}\frac{\omega}{\omega_D}\frac{2\xi^2\beta - \beta(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} + \frac{\dot{u} + u(0)\omega\xi}{\omega_D}$$

On ne s'intéressera dans le reste de cette partie qu'à la partie permanente de la réponse après disparition des termes transitoires due à l'amortissement du système. La réponse permanente s'écrit :

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\,(Acos\omega_D t + Bsin\omega_D t) + \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta cos\bar{\omega}t)$$

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)sin\bar{\omega}t - 2\xi\beta cos\bar{\omega}t)$$



Régime forcé dissipatif

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}((1-\beta^2)sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta cos\overline{\omega}t)$$

$$u_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

Et l'angle de phase est le retard de la réponse par rapport à la force appliquée

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}\right)$$

$$u(t) = u_0 \sin(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$p(t) = p_0 sin\overline{\omega}t$$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$u(t) = \mathrm{D}\frac{P_0}{k}\sin(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$U_{max} = \mathrm{D}\frac{P_0}{k}$$

Régime forcé dissipatif

Regardons les deux paramètres D et θ

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}} \qquad \theta = tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}\right)$$

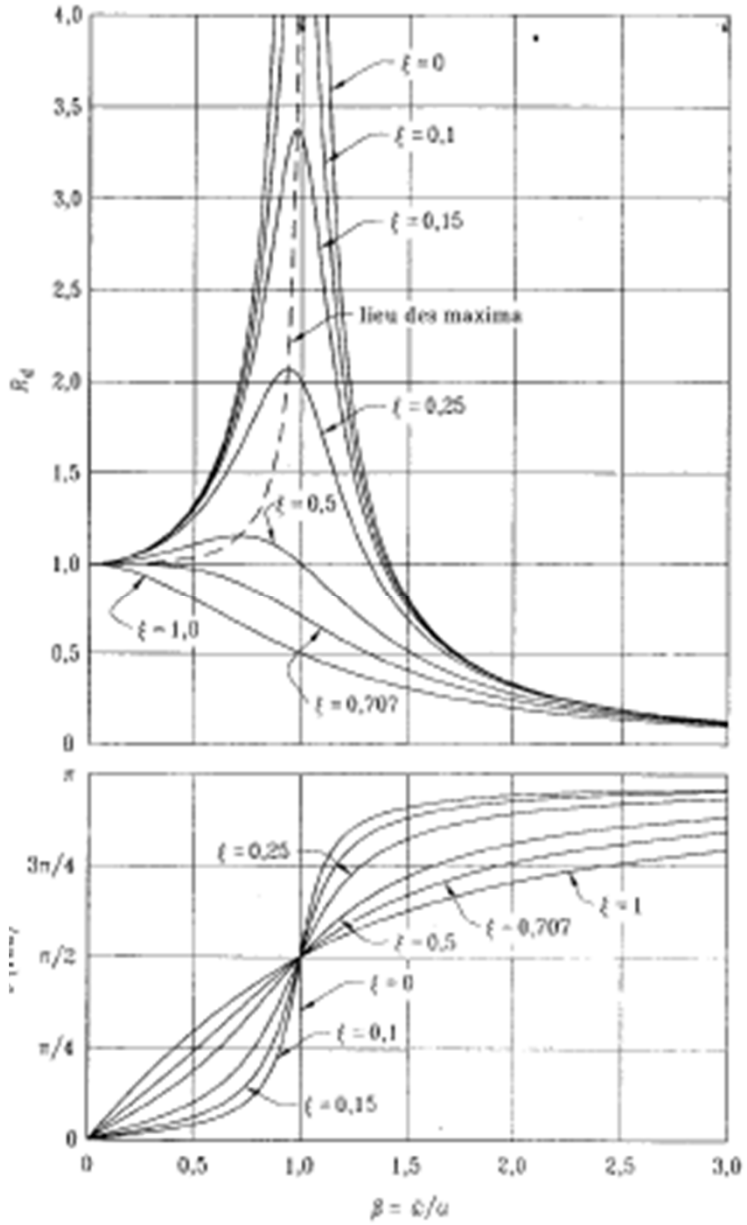
D est le facteur dynamique d'amplification

$$U_{max} = \mathrm{D}\frac{P_0}{k}$$

θ est le déphasage de la réponse des déplacements au chargement

Ces termes dépendent de ξ et β

Régime forcé dissipatif



Régime forcé dissipatif

Régime permanent du à une force cosinus

L'équation du mouvement de l'oscillateur en régime forcé dissipatif est la suivante :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{p_0}{m} cos\bar{\omega}t$$

La solution particulière est similaire à l'équation

$$u_p(t) = G_1 sin\bar{\omega}t + G_2 cos\bar{\omega}t$$

Et les constantes sont

$$G_1 = \frac{p_0}{k}\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2} \qquad G_1 = \frac{p_0}{k}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

$$u(t) = \frac{p_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}(2\xi\beta sin\bar{\omega}t + (1-\beta^2)cos\bar{\omega}t)$$

La réponse permanente peut aussi s'exprimer

$$u(t) = u_0 \cos(\bar{\omega}t - \theta)$$

Dans laquelle u_0 et θ sont donnés par $u_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$ et

$\theta = tan^{-1}\left(\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)}\right)$