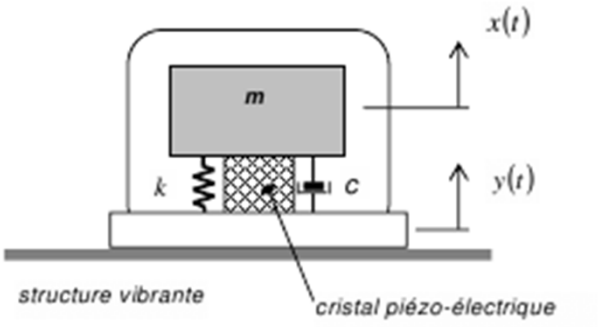
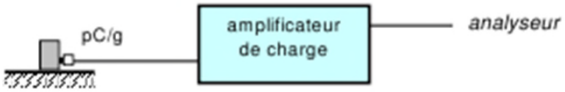
Dynamique des structures

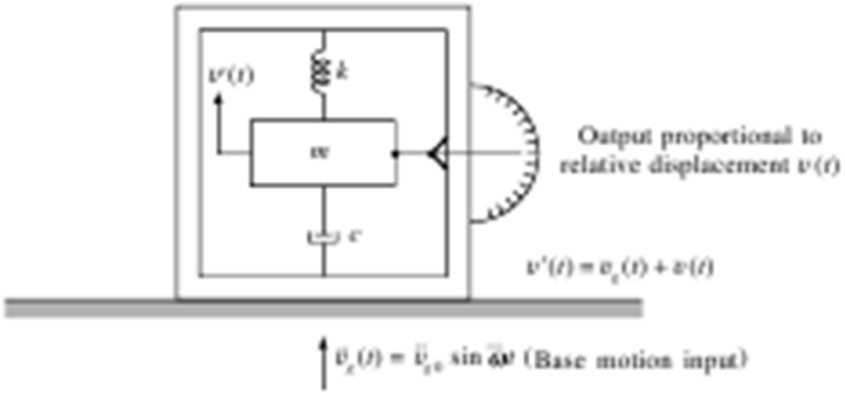
Isolation du mouvement

Pr. Karim Houmy
Département Energie et Agroéquipement
IAV Hassan II

Appareils de mesure des vibrations







On utilise en général deux types d'appareils :

Les capteurs d'amplitude ou sismographes
Les capteurs d'accélération ou accéléromètres

Appareils de mesure des vibrations

Les capteurs d'amplitude

Nous considérons un instrument dont le capteur est soumis au déplacement harmonique suivant

$$u_g(t) = u_{g0} sin\overline{\omega}t$$

L'accélération de la base est donnée par

$$\ddot{u_g}(t) = -\overline{\omega}^2 u_{g0} sin\overline{\omega}t$$

Et la force effective devient

$$p_{eff}(t) = m\overline{\omega}^2 u_{g0} sin\overline{\omega}t$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = m\overline{\omega}^2 u_{g0} sin\overline{\omega}t = p_0 sin\overline{\omega}t$$

Appareils de mesure des vibrations

Les capteurs d'amplitude

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = m\overline{\omega}^2 u_{g0} sin\overline{\omega}t = p_0 sin\overline{\omega}t$$

L'amplitude du mouvement peut être calculée à partir de l'équation

$$u_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

et de la définition du facteur d'amplification dynamique D

$$\mathrm{D} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$u_0 = \frac{m\overline{\omega}^2 u_{g0}}{k} D = u_{g0}\beta^2 \mathrm{D}$$

Appareils de mesure des vibrations

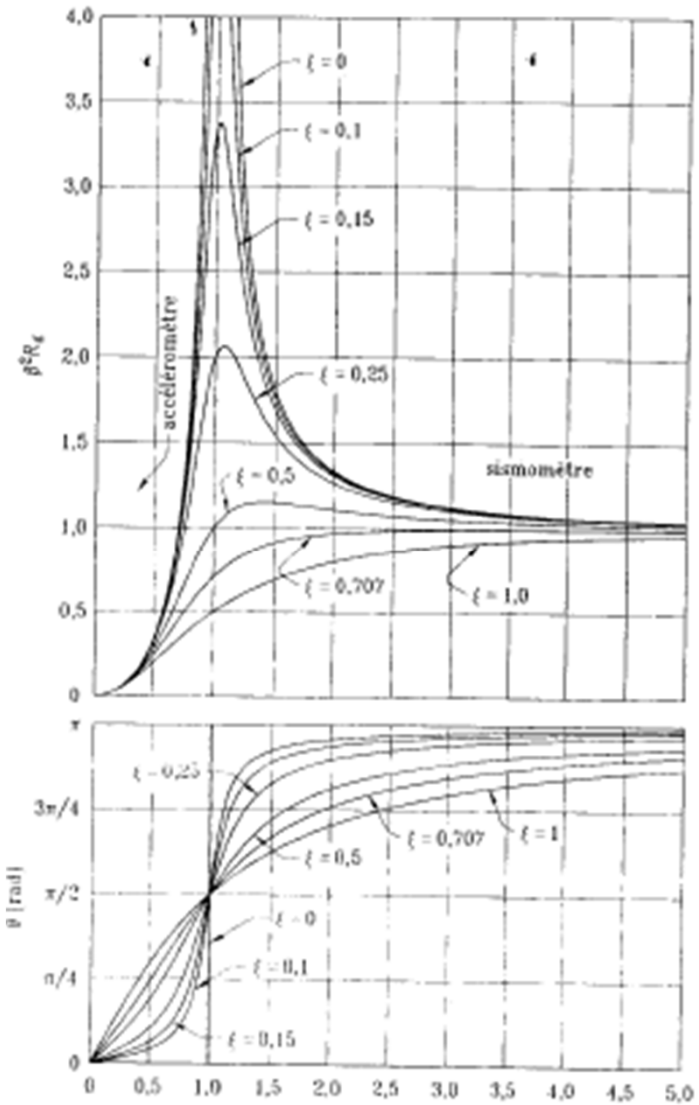
Les capteurs d'amplitude

$$u_0 = \frac{m\bar{\omega}^2 u_{g0}}{k} D = u_{g0}\beta^2 \mathrm{D}$$

La variation est constante pour $\beta > 2{,}5$

Si $\beta > 2{,}5\ et\ \xi = 0\ on\ a\ \theta = 180$. Pour toute valeur de ξ on introduit une distorsion dans la réponse. Par conséquent un capteur d'amplitude doit avoir la plus petite fréquence naturelle et le plus bas taux d'amortissement possible

Un désavantage d'un tel système est qu'il doit être très grand, car la masse doit se déplacer de l'amplitude des déplacements que l'on veut mesurer puisque $\beta^2 D \approx 1$



Appareils de mesure des vibrations

Les capteurs d'accélération

Nous considérons la réponse d'un instrument dont la base est soumise à une accélération variant harmoniquement selon l'équation suivante :

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g0} sin\overline{\omega}t$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_{g0}(t)$$

On peut facilement écrire

$$p_{eff}(t) = -m\ddot{u}_{g0} sin\overline{\omega}t = p_0 sin\overline{\omega}t$$

$$u_0 = \frac{p_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

Donc

$$u_0 = \frac{m\ddot{u}_{g0}}{k}D$$

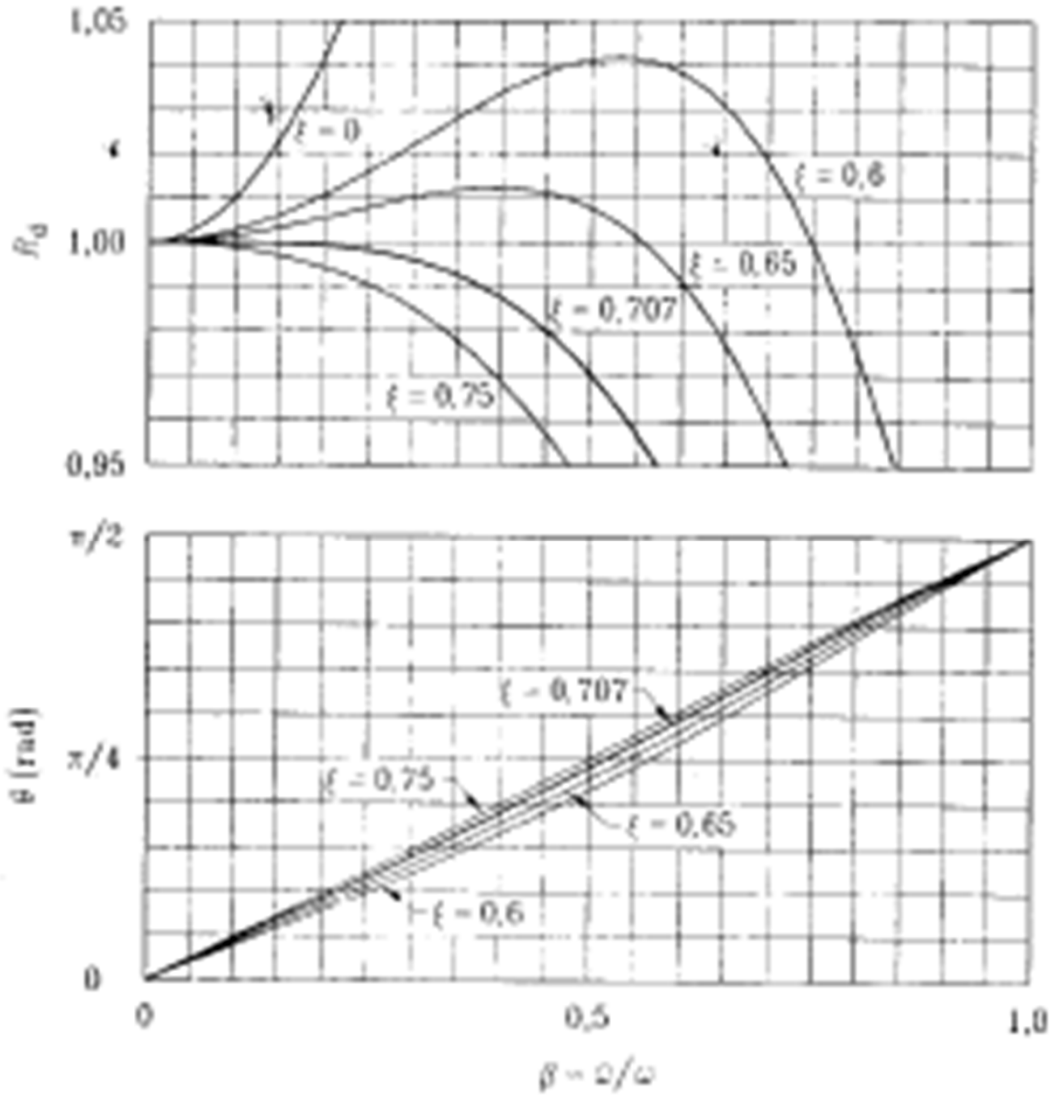
Appareils de mesure des vibrations

Les capteurs d'accélération

$$u_0 = \frac{m\ddot{u}_{g0}}{k} D$$

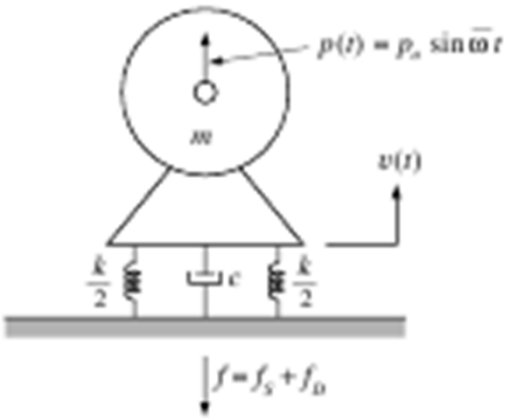
$\beta < 0{,}2$

$\xi = 0{,}707$

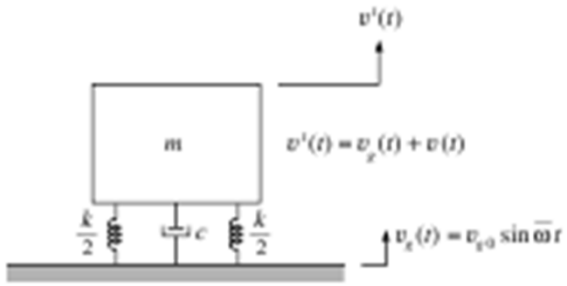


Un appareil avec une fréquence propre de 100 Hz et un taux d'amortissement de 0,707 a une étendue de fréquence mesurable de 0 à 20 Hz sans erreur appréciable

Problème d’isolation

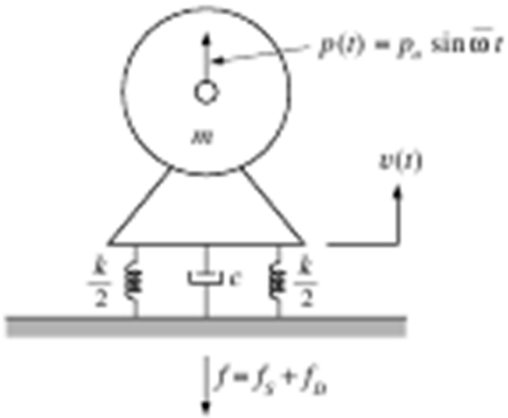


Problème d’isolation des forces



Problème d’isolation du mouvement

Problème d'isolation des forces



Soit une force verticale oscillatoire p(t) produite par la rotation d'une masse excentrique d'une machine rotative , par exemple, et dont l'expression

$$p(t) = p_0 \sin \bar{\omega} \mathrm{t}$$

La réponse du système montré dans le figure ci-dessus sous l'action de cette force excitatrice est donné par

$$\mathrm{u}(t) = \frac{p_0}{k} \mathrm{D} \sin(\bar{\omega} t - \theta)$$

Où D est le facteur d'amplification dynamique

La force générée par la machine en régime permanent est transmise au support par le ressort et l'amortisseur tel que montré à la figure ci-dessus

Problème d'isolation des forces

Cette force a comme expression

$$\vec{f} = \overrightarrow{f_s} + \overrightarrow{f_D}$$

Dont la valeur maximum peut être trouvée en considérant le polygone des forces. On a ainsi

$$f_{max} = \sqrt{(ku_0)^2 + (c\overline{\omega}u_0)^2} = ku_0\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

Or $u_0 = ({}^{p_0}/_{k})D$, nous déduisons donc

$$f_{max} = \frac{p_0\sqrt{1 + (2\beta\xi)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = p_0 D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

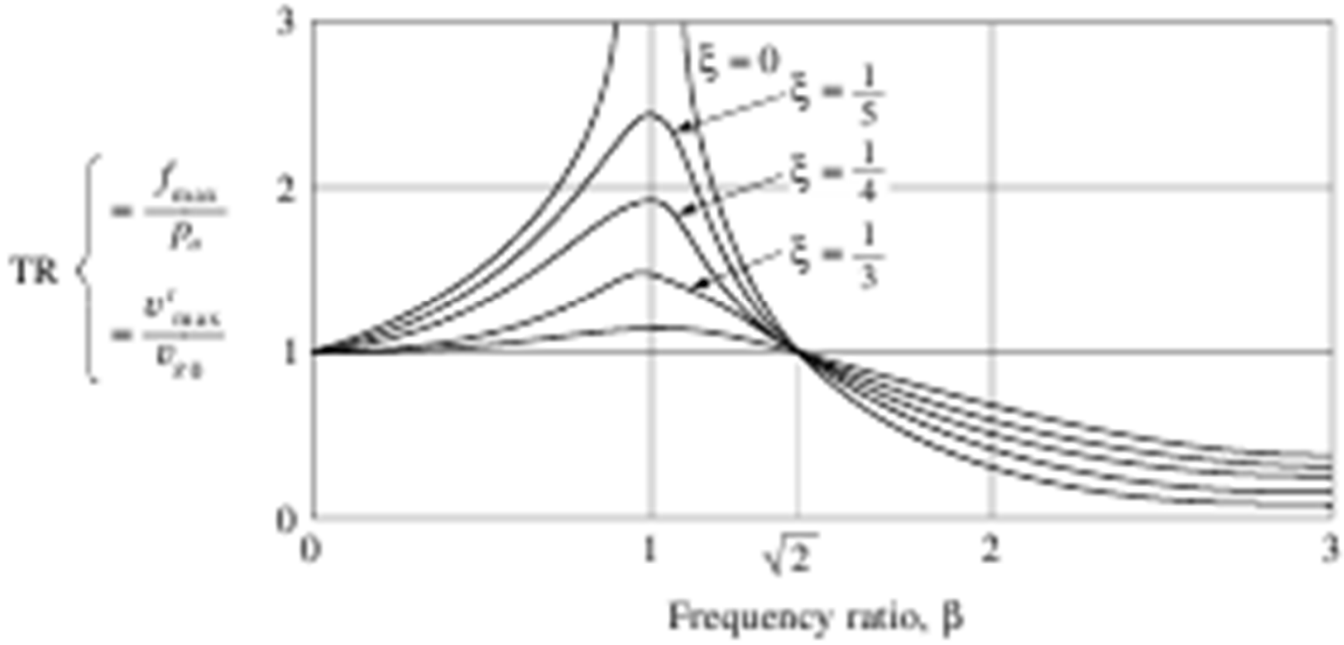
Définissons la transmissibilité du système $TR = {}^{f_{max}}/_{P_0}$, on obtient

$$TR = \frac{f_{max}}{P_0} = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$$

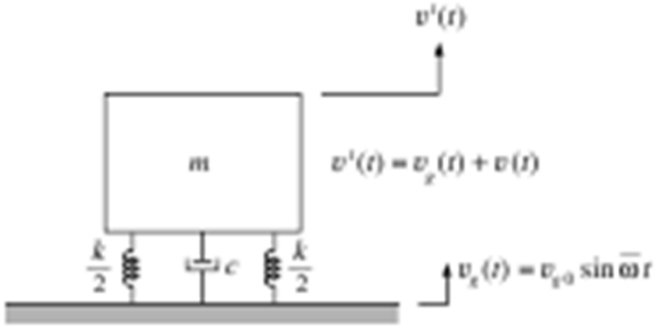
Problème d'isolation des forces

On remarque d'après la courbe que toutes les courbes passent au même point d'ordonnées 1 à $\beta = \sqrt{2}$

Il y a amplification de l'amplitude de la force d'excitation pour $0 < \beta \leq \sqrt{2}$. Il y a réduction de l'amplitude de la force d'excitation – la transmissibilité est inférieure à 1 pour $\beta > \sqrt{2}$. On peut donc isoler les vibrations que si $\beta > \sqrt{2}$ .On remarque aussi que dans cet intervalle, la transmissibilité diminue avec une diminution de l'amortissement et atteint son minimum pour $\xi = 0$



Mouvement harmonique de la



$$\ddot{u}_g = \ddot{u}_{g0} \sin \overline{\omega} t$$

Comment réduire ce rapport de transmissibilité qui est le rapport entre accélérations

$$\frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{g0}}$$

L'équation du mouvement de la masse est $m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$

$$\ddot{u}^t = \ddot{u} + \ddot{u}_{g0}$$

$$\dot{u} = \dot{u}^t - \dot{u}_{g0}$$

Deux manières d'exprimer l'équation de mouvement

$$u = u^t - u_{g0}$$

Mouvement total $m\ddot{u}^t + c\dot{u}^t + ku^t = c\dot{u}_g + ku_g$

Mouvement relatif $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -\mathrm{m}\ddot{u}_g$

Mouvement harmonique de la base

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -\mathrm{m}\ddot{u}_{g0} sin\overline{\omega}t \qquad \ddot{u}_g = \ddot{u}_{g0}\sin\overline{\omega}t$$

Cette équation correspond à un système forcé dissipatif et la solution prend la forme suivante :

$$u(t) = -\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k} Dsin(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$$

$$\dot{u}(t) = -\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k}\overline{\omega}Dcos(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$m\ddot{u}^t = -c\dot{u} - ku$$

$$m\ddot{u}^t = c\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k}\overline{\omega}Dcos(\overline{\omega}t - \theta) + \mathrm{k}\frac{m\ddot{u}_{g0}}{k} Dsin(\overline{\omega}t - \theta)$$

$$\ddot{u}^t = c\frac{\ddot{u}_{g0}}{k}\overline{\omega}Dcos(\overline{\omega}t - \theta) + \frac{\ddot{u}_{g0}}{} Dsin(\overline{\omega}t - \theta) \qquad c\frac{\overline{\omega}}{k} = 2\xi\beta$$

On est intéressé par l'amplitude

$$\ddot{u}_0^t = \ddot{u}_{g0} D[1 + (2\xi\beta)^2]^{1/2}$$

$$\frac{\ddot{u}_0^t}{\ddot{u}_{g0}} = D[1 + (2\xi\beta)^2]^{1/2}$$ C'est la même chose que $TR = \frac{f_{max}}{P_0} = D\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}$

Nous avons la transmissibilité en terme d'accélération et l'autre la transmissibilité en terme de forces et mathématiquement nous avons le même résultat