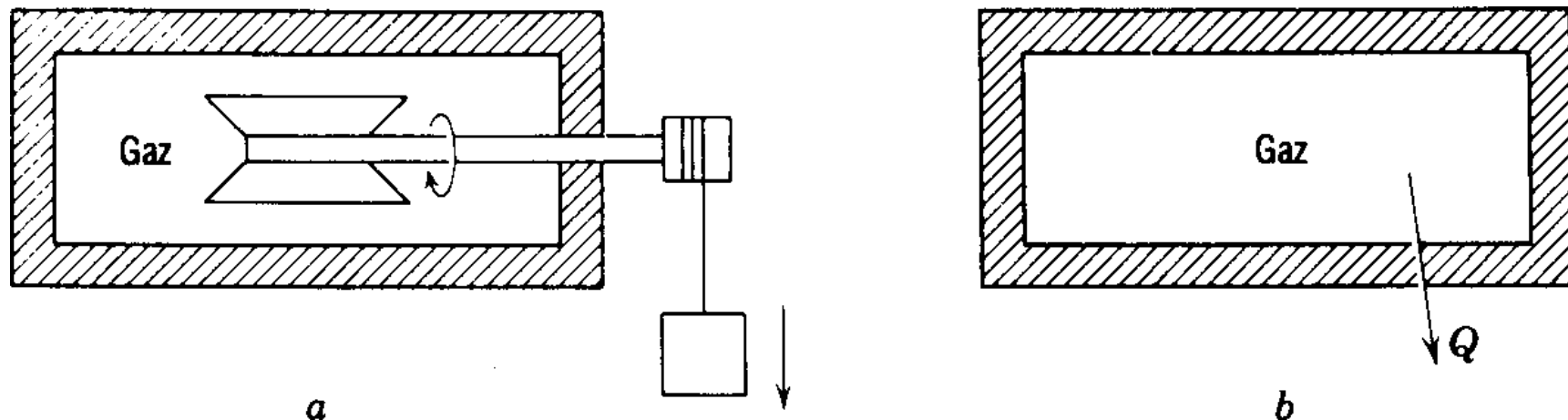


5 Le premier principe de la thermodynamique

Ayant défini les concepts de travail et de chaleur, nous sommes maintenant en mesure de présenter le premier principe de la thermodynamique, désigné encore sous le nom de **principe de conservation de l'énergie**. On commencera par les transformations de systèmes fermés, puis on l'étendra aux systèmes ouverts (volumes de contrôle).

5.1 Transformations fermées (cycles) d'un système fermé

Considérons le système fermé représenté ci-dessous



Dans un premier temps, on fournit un certain travail W au système en faisant tourner l'agitateur. Dans un deuxième temps, on laisse le système revenir à son état initial par échange d'une quantité de chaleur Q avec le milieu extérieur.

L'ensemble des deux transformations constitue donc un cycle. Le premier principe postule que

le travail W et la chaleur Q échangés au cours d'un tel cycle sont proportionnels, la constante de proportionnalité étant toujours la même.

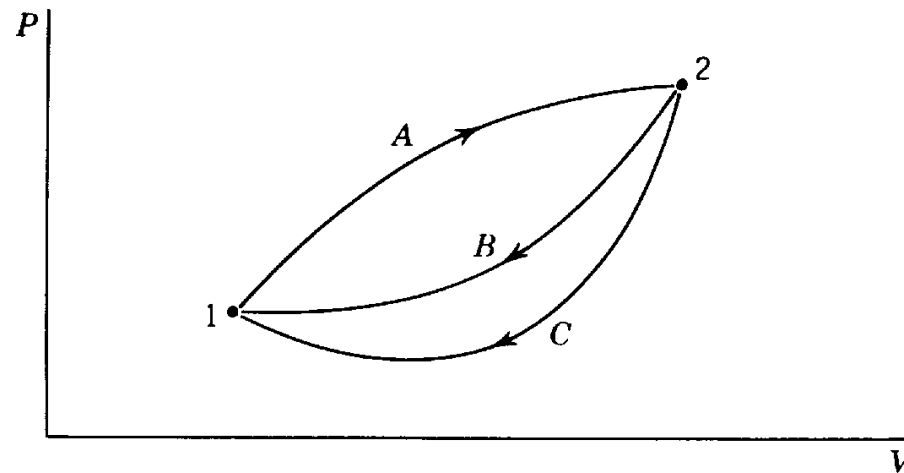
$$JQ = W \quad \Leftrightarrow \quad J \oint \delta Q = \oint \delta W \quad (5.1)$$

Ce postulat est fondé sur l'observation expérimentale. La constante de proportionnalité J dans l'expression dépend des unités utilisées pour exprimer travail et chaleur. Si l'on exprime travail et chaleur dans la même unité, alors la constante vaut -1, de sorte que l'expression du premier principe devient

$$\oint (\delta Q + \delta W) = 0 \quad (5.2)$$

5.2 Transformations ouvertes d'un système fermé

Considérons un système fermé subissant un cycle formé de deux transformations ouvertes successives A et B représentées ci-dessous dans un diagramme $p - V$.



En vertu du premier principe (5.2), on a

$$\oint (\delta Q + \delta W) = \int_1^2 (\delta Q + \delta W)_A + \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_B = 0$$

Mais semblablement, sur le cycle formé des transformations A et C , on aura

$$\int_1^2 (\delta Q + \delta W)_A + \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_C = 0$$

Par soustraction, on en déduit

$$\int_2^1 (\delta Q + \delta W)_B = \int_2^1 (\delta Q + \delta W)_C \quad (5.3)$$

On en déduit que, puisque les chemins B et C sont arbitraires, l'intégrale de $(\delta Q + \delta W)$ est indépendante du chemin parcouru, et ne dépend que des états initial et final, et par conséquent que $(\delta Q + \delta W)$ est une différentielle exacte.

On désigne par le symbole E la fonction (p. ex. de p et V) dont la différentielle

$$dE = \delta Q + \delta W, \quad (5.4)$$

et on lui donne le nom d'**énergie du système**. Par construction, il s'agit d'une variable d'état.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (p. ex. en suivant le chemin A), on aura donc

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = E_2 - E_1 \quad (5.5)$$

${}_1Q_2$ et ${}_1W_2$ étant la chaleur et le travail reçus par le système au cours de la transformation.

Du point de vue physique, la variable E représente l'énergie totale du système.

Cette énergie peut se présenter sous diverses formes :

- énergie cinétique,
- énergie potentielle,
- énergie associée aux mouvements (de translation, de rotation, de vibration) des molécules,
- énergie associée au nuage électronique des molécules,
- énergie chimique,
- énergie électrique, p. ex. d'un condensateur chargé,
- ...

En thermodynamique, on a coutume de séparer les énergies cinétique et potentielle et de regrouper toutes les autres formes d'énergie du système en une seule variable appelée **énergie interne**, notée U . La raison en est que les énergies cinétique et potentielle dépendent du référentiel choisi et s'expriment directement en fonction de la masse, de la vitesse et des coordonnées dans ce référentiel.

La différentielle de l'énergie du système peut alors s'exprimer comme suit

$$dE = dU + dE_{\text{cin.}} + dE_{\text{pot.}} \quad (5.6)$$

de sorte qu'on obtient la forme différentielle du premier principe

$$\delta Q + \delta W = dU + dE_{\text{cin.}} + dE_{\text{pot.}} \quad (5.7)$$

Les expressions de l'énergie cinétique et potentielle sont celles établies en mécanique rationnelle, ce que confirme l'analyse des deux cas suivants.

1. Soit un système subissant une force horizontale. Le travail infinitésimal effectué par cette force sera $\delta W = F dx$. Mais, par la deuxième loi de Newton, $F = m \frac{dc}{dt}$, où c est la composante de la vitesse dans la direction de la force. Comme seule varie l'énergie cinétique au cours de cette transformation, on a

$$\delta W = m \frac{dc}{dt} dx = mc \frac{dc}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(\frac{mc^2}{2} \right) dx = d \left(\frac{mc^2}{2} \right) = dE_{\text{cin.}}$$

puisque $dt = dx/c$.

2. Soit un système en mouvement rectiligne uniforme dans la direction verticale. Au cours du mouvement, seule varie l'énergie potentielle. Comme ce système est en mouvement rectiligne uniforme, il s'y applique une force F qui équilibre son poids. Le travail de cette force $\delta W = F dz = mg dz = d(mgz)$, de sorte que

$$\delta W = F dz = mg dz = d(mgz) = dE_{\text{pot.}}$$

En substituant les expressions de l'énergie cinétique et potentielle dans la forme différentielle du premier principe, on obtient

$$\delta Q + \delta W = dU + d\left(\frac{mc^2}{2}\right) + d(mgz) \quad (5.8)$$

et, en intégrant entre les états initial et final (en supposant l'accélération de la gravité g constante)

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = U_2 - U_1 + m\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + mg(z_2 - z_1) \quad (5.9)$$

Remarquons en terminant que ces équations ne nous informent que sur les variations d'énergie interne, cinétique et potentielle, pas sur leur valeur absolue, ou en d'autres termes que les énergies définies par le premier principe sont connues à une constante près. Au besoin, on fixera ces constantes en attribuant une valeur conventionnelle des composantes de l'énergie à un état de référence.

5.3 L'énergie interne

L'énergie interne U , tout comme les énergies cinétique et potentielle, est une variable extensive. Comme à toutes les variables extensives, on peut lui associer une variable intensive massique, l'énergie interne massique u .

Comme on a vu au chapitre 3 qu'en l'absence de mouvement, de pesanteur et d'effets superficiels, électrique et magnétique, l'état d'une substance pure est entièrement déterminé par deux variables indépendantes, il en résulte que l'énergie interne est liée aux autres variables thermodynamiques par une relation d'état. Ainsi, dans les tables thermodynamiques des substances pures, l'énergie interne est tabulée avec les autres variables.

Dans la zone de saturation, l'énergie interne est liée au titre en vapeur comme le volume massique. En effet,

$$U = U_l + U_g \quad \rightarrow \quad mu = m_l u_l + m_g u_g$$

soit, en divisant par la masse m

$$u = (1 - x)u_l + xu_g = u_l + x(u_g - u_l)$$

5.4 Analyse de problèmes

À ce stade, il est utile de formaliser une méthodologie permettant d'analyser et de résoudre les problèmes de thermodynamique tels qu'ils se présenteront aux séances d'exercices et d'analyser les données recueillies lors des laboratoires.

Cette méthodologie prend la forme d'une série de questions auxquelles on devra apporter une réponse :

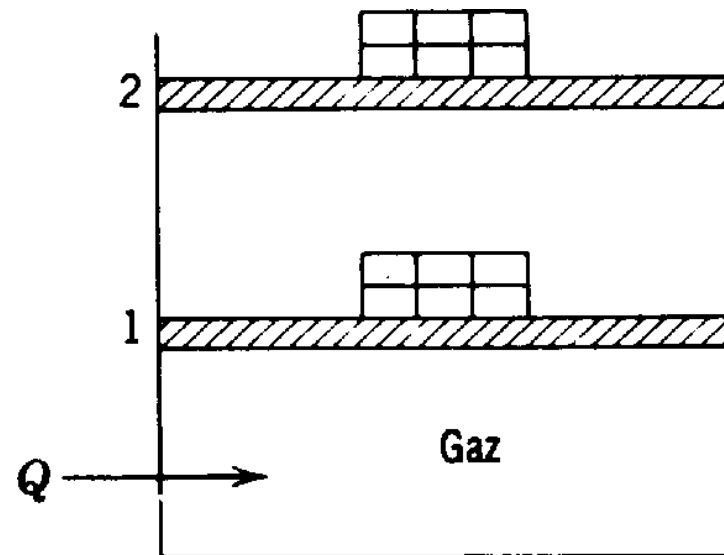
1. Quel est le système analysé ? Tracer ses frontières. S'agit-il d'un système fermé ou ouvert ?
2. Que sait-on de l'état initial ?
3. Que sait-on de l'état final ?
4. Que sait-on de la transformation subie par le système ? Certaines variables demeurent-elles constantes ?
5. Est-il utile de représenter la transformation sur un diagramme thermodynamique (p. ex. $p - v$) ?

6. Quel modèle décrit-il le comportement de la substance active (fluide à changement de phase avec propriétés tabulées, gaz parfait, etc.) ?
7. Quels sont les échanges aux frontières (travail, chaleur), quelle loi peut s'appliquer ?
8. Quelle stratégie de résolution va-t-on adopter, c.-à-d. comment va-t-on utiliser les informations rassemblées lors des étapes précédentes pour obtenir la solution ?

Bien qu'il ne soit pas toujours nécessaire de répondre systématiquement à toutes ces questions, cette méthodologie peut s'avérer d'une grande aide lorsqu'on est confronté à un problème nouveau ou qu'on est bloqué dans la résolution d'un problème. Plusieurs exemples sont donnés dans le livre de Van Wylen et al. On aura l'occasion de la mettre en pratique aux exercices.

5.5 L'enthalpie

Considérons une transformation quasi-statique isobare d'un système fermé qui n'échange du travail qu'à une frontière mobile.



En supposant nulles les variations d'énergie cinétique et potentielle, le premier principe s'écrit

$${}_1Q_2 + {}_1W_2 = U_2 - U_1$$

Mais, s'agissant d'une transformation quasi-statique d'un système fermé à frontière

mobile, le travail est donné par

$${}_1W_2 = - \int_1^2 p dV = -p(V_2 - V_1)$$

puisque la pression est constante au cours de la transformation.

Par conséquent,

$${}_1Q_2 = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1) = (U_2 + p_2V_2) - (U_1 + p_1V_1)$$

et donc, pour ce type particulier de transformation, la quantité de chaleur échangée est égale à la variation de la grandeur $U + pV$. Puisque U , p et V sont des variables d'état, il en est de même de l'expression $U + pV$.

Il s'avère donc commode de définir une nouvelle variable extensive, que l'on appelle **l'enthalpie**

$$H \equiv U + pV \quad (5.10)$$

et sa correspondante intensive massique

$$h \equiv u + pv \quad (5.11)$$

Avec cette définition, la quantité de chaleur échangée au cours d'une transformation quasi-statique isobare d'un système fermé est égale à la variation d'enthalpie. Ce résultat n'est évidemment valide que pour cette transformation particulière, parce que le travail est égal à la variation du produit pV . Il ne l'est plus si la pression varie au cours de la transformation.

On verra que l'enthalpie a une signification dans d'autres cas également, en particulier pour les systèmes ouverts stationnaires.

Il arrive fréquemment que les tables thermodynamiques fournissent les valeurs de l'enthalpie mais pas celles de l'énergie interne. Mais, dans ce cas, on peut facilement obtenir l'énergie interne par application de la définition de l'enthalpie

$$u = h - pv$$

Même si l'enthalpie n'a pas de signification physique pour les transformations de systèmes fermés non isobares, cette relation entre variables d'état est valable en toutes circonstances.

Tout comme l'énergie interne, l'enthalpie est définie à une constante près, fixée arbitrairement pour un état de référence. L'enthalpie et l'énergie interne à l'état de référence doivent cependant être liées par la relation $h = u + pv$. À l'état liquide, le produit pv est souvent négligeable et l'on a $h \approx u$.

Dans la zone de saturation, l'enthalpie massique dépend du titre en vapeur de la même manière que le volume massique et que l'énergie massique, à savoir

$$h = (1 - x)h_l + xh_g = h_l + x(h_g - h_l)$$

5.6 Les chaleurs massiques à volume constant et à pression constante

Les chaleurs massiques sont un premier exemple de ce que l'on appelle **coefficients thermodynamiques**. Il s'agit de dérivées partielles de certaines variables thermodynamiques primaires telles que celles déjà introduites (p, v, T, u, h) par rapport à d'autres. Comme il s'agit de dérivées de variables d'état par rapport à d'autres variables d'état, elles sont elles-mêmes des variables d'état.

La chaleur massique à volume constant se définit de la manière suivante :

$$c_v \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (5.12)$$

Remarquez bien l'indice v adjoint à la dérivée : il signifie que la dérivée est prise en maintenant constant le volume massique ou, en d'autres termes, qu'il s'agit de la dérivée partielle par rapport à T pour le choix du couple T, v comme variables indépendantes.

En effet, si l'on sait que, pour une substance pure, seules deux variables

thermodynamiques sont indépendantes, on a, sauf cas particuliers comme les zones de saturation, le choix du couple de variables indépendantes.

Le passage d'un système de variables indépendantes à un autre n'étant rien d'autre, du point de vue mathématique, qu'un changement de variables ou encore une transformation de coordonnées, on peut, en utilisant les règles s'appliquant aux transformations de coordonnées dans un plan, établir les relations entre les dérivées dans divers systèmes de variables indépendantes (voir van Wylen, chap. 10).

Revenons à la chaleur massique à volume constant. On peut en donner une interprétation physique qui explique sa désignation. Si l'on considère une transformation isochore d'un système fermé, alors par application du premier principe

$$du = \delta q + \delta w = \delta q - p dv = \delta q$$

puisque $dv = 0$. On en déduit que

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \left(\frac{\delta q}{\delta T} \right)_v$$

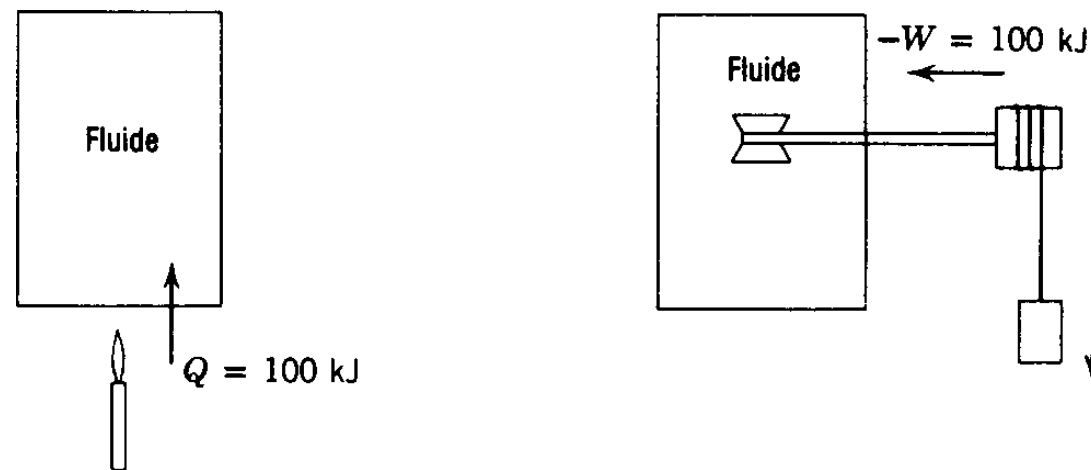
et l'on voit que la chaleur massique à volume constant est la quantité de chaleur échangée pour une élévation unitaire de température au cours d'une transformation isochore.

Semblablement, l'expression de la chaleur massique à pression constante, dont la signification physique est la quantité de chaleur échangée pour une élévation unitaire de température au cours d'une transformation isobare, sera, compte tenu du fait que pour une telle transformation, la quantité de chaleur échangée est égale à la variation d'enthalpie (cfr section précédente)

$$c_p = \left(\frac{\delta q}{\delta T} \right)_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (5.13)$$

Remarques

1. Comme les chaleurs massiques sont des variables d'état, elles sont indépendantes de la transformation subie par le système. Ainsi, si l'on considère le système fermé à volume constant auquel on fournit 100 kJ sous forme de chaleur, ou sous forme de travail,



la variation d'énergie interne est la même dans les deux cas, et par conséquent aussi celle de température. Donc, la chaleur massique moyenne est identique dans les deux cas.

2. Les chaleurs massiques ainsi définies ne concernent que le travail de compression étudié à la section 4.2. Pour les autres formes de travail, telles que celles mentionnées à la section 4.3, on définit deux chaleur massiques, l'une correspondant à une transformation à « déplacement » constant, et l'autre correspondant à une transformation à « force » constante.
3. Pour les solides et les liquides, le volume massique est très petit, de sorte que, comme on l'a mentionné à la section précédente, $dh = du + d(pv) \approx du$. Il en résulte que

$$c_p \approx c_v \quad (5.14)$$

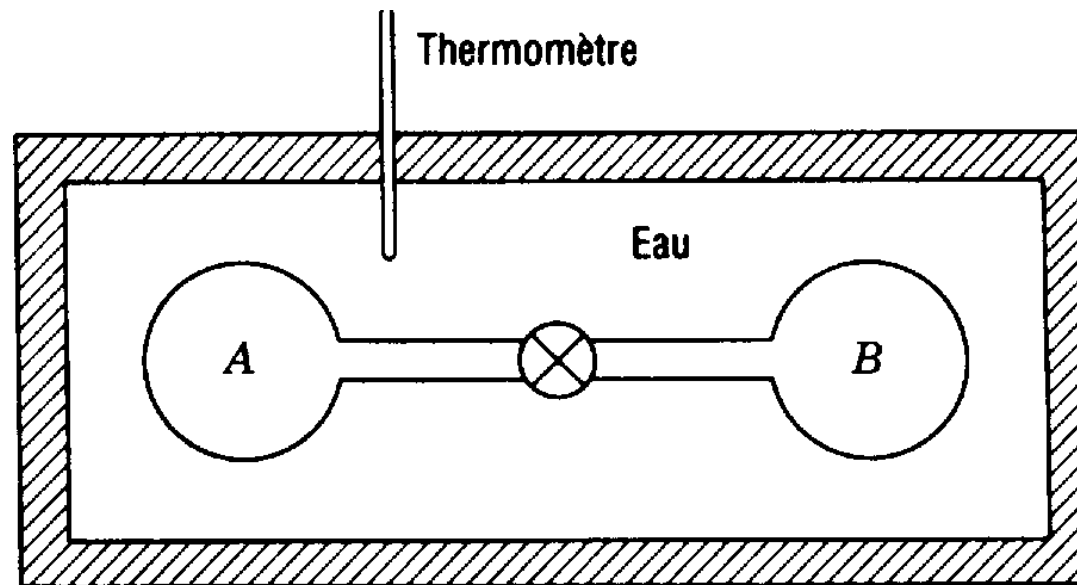
et l'on peut omettre l'indice. De plus, pour de nombreuses transformations, on peut admettre que la chaleur massique est approximativement constante, de sorte que, pour une transformation finie,

$$h_2 - h_1 \approx u_2 - u_1 = c(T_2 - T_1) \quad (5.15)$$

5.7 L'énergie interne, l'enthalpie et les chaleurs massiques des gaz parfaits

Tout comme on l'avait fait pour l'équation d'état liant p , v et T , nous allons maintenant discuter la forme particulière de l'équation d'état liant l'énergie interne aux autres variables thermodynamiques pour les substances pures en phase vapeur aux faibles masses volumiques.

Cette équation a été découverte grâce à l'expérience de Joule, illustrée ci-dessous.



Deux récipients connectés entre eux par un tuyau dans lequel est insérée une vanne

sont immergés dans un réservoir d'eau isolé. Le réservoir A est rempli d'un gaz à haute pression, alors que le réservoir B a été évacué, et l'on attend que l'eau et les réservoirs soient en équilibre thermique.

La vanne est ouverte et le gaz se répand du réservoir A dans le réservoir B jusqu'à ce que les pressions s'égalisent.

- Comme on l'a déjà fait observer, cette transformation du système « gaz » s'effectue sans échange de travail.
- Par ailleurs, Joule constate qu'au cours de la transformation, la température de l'eau ne change pas, ce qui implique que la transformation s'est effectuée sans échange de chaleur.

Par application du premier principe, il en résulte que l'énergie interne du système « gaz » est restée inchangée.

On en déduit que l'énergie interne d'un gaz ne dépend pas de la pression, mais uniquement de la température :

$$u = f(T) \quad (5.16)$$

Ce résultat est confirmé par la mécanique statistique. Il en découle plusieurs corollaires :

- La chaleur massique à volume constant

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{du}{dT} \quad (5.17)$$

est aussi une fonction de la température uniquement.

- L'enthalpie

$$h = u + pv = u + RT \quad (5.18)$$

est aussi une fonction de la température uniquement.

- La chaleur massique à pression constante

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \frac{dh}{dT} = c_v + R \quad (5.19)$$

est aussi une fonction de la température uniquement.

Comme on l'a souligné plus haut, l'énergie interne est due à plusieurs contributions. Mis à part la contribution chimique, qui n'intervient de toute façon pas en l'absence de réaction chimique, les autres contributions dues au mouvement des molécules et à leur nuage électronique peuvent s'évaluer théoriquement et l'on obtient les résultats suivants pour le modèle le plus simple de rotateur rigide/oscillateur harmonique :

Translation $e_{tr} = \frac{3}{2}RT$

Rotation $e_{rot} = RT \left(1 - \frac{\theta_R}{\theta_R + 3T} \right)$ où θ_R est la température de rotation de la molécule, inversement proportionnelle à son moment d'inertie.

Vibration Pour chaque mode vibrationnel, $e_{vib} = R_s \frac{\theta_V}{e^{\frac{\theta_V}{T}} - 1}$ où θ_V est la température de vibration du mode, liée à sa fréquence de vibration.

Nuage électronique Pour le nuage électronique, il n'y a pas d'expression analytique simple pour les niveaux d'énergie accessibles, qui doivent être obtenus expérimentalement (mesures spectroscopiques), et donc pas d'expression analytique simple de l'énergie électronique.

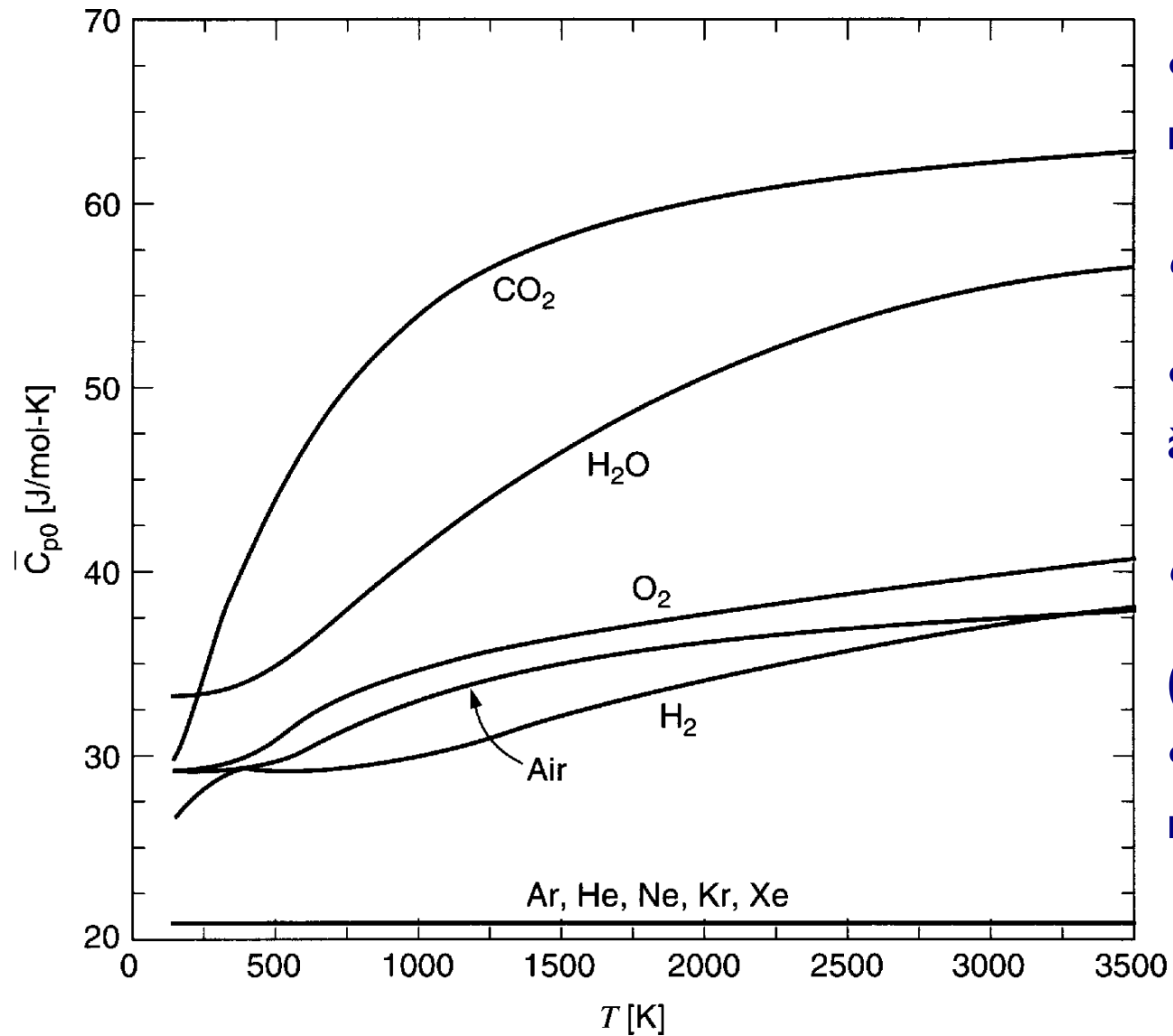
Pour la plupart des gaz courants,

- θ_R est très faible (quelques K), de sorte qu'aux températures usuelles, $e_{rot} = RT$
 - la seule exception est l'hydrogène, qui, en raison de son très faible moment d'inertie, a une température de rotation sensiblement plus élevée (≈ 80 K).
- Pour les molécules diatomiques, les températures de vibration sont en général assez bien plus élevées que la température ambiante, de sorte qu'à température ambiante les modes vibrationnels ne sont pas excités, et par conséquent l'énergie vibrationnelle est nulle.

Par contre, pour les molécules polyatomiques (CO_2 , H_2O), certains modes vibrationnels sont déjà excités à la température ambiante.

- Aux températures ambiantes, le nuage électronique est dans l'état fondamental, et donc l'énergie électronique est nulle.

Ces résultats sont illustrés par le diagramme suivant, qui représente la chaleur molaire à pression constante de divers gaz.



- Pour les gaz monoatomiques,

$$\bar{c}_p = \frac{5}{2}\bar{R} = 20,53 \text{ J/mol K}$$

- Pour les gaz diatomiques à température ambiante,

$$\bar{c}_p = \frac{7}{2}\bar{R} = 28,75 \text{ J/mol K}$$

(sauf pour l'hydrogène).

- Pour les gaz polyatomiques,

$$\bar{c}_p > \frac{7}{2}\bar{R}$$

Pour les applications, on a le choix entre 3 méthodes de sophistication croissante :

1. On considère les chaleurs massiques constantes. C'est toujours une excellente approximation pour les gaz monoatomiques. Pour les gaz diatomiques, ce n'est valable que pour une gamme limitée de températures au voisinage de la température ambiante, sauf si l'on utilise une valeur moyenne sur l'intervalle de températures considéré.
2. On utilise une relation empirique ajustée aux valeurs exactes fournies par la thermodynamique statistique. De telles relations sont disponibles dans la littérature, notamment dans le livre de Van Wylen et al.
3. On utilise les expressions fournies par la thermodynamique statistique, soit directement, soit sous forme de tables.

5.8 Le premier principe sous la forme d'une équation d'évolution temporelle

En divisant la forme différentielle du premier principe (5.7)

$$\delta Q + \delta W = dU + dE_{\text{cin.}} + dE_{\text{pot.}}$$

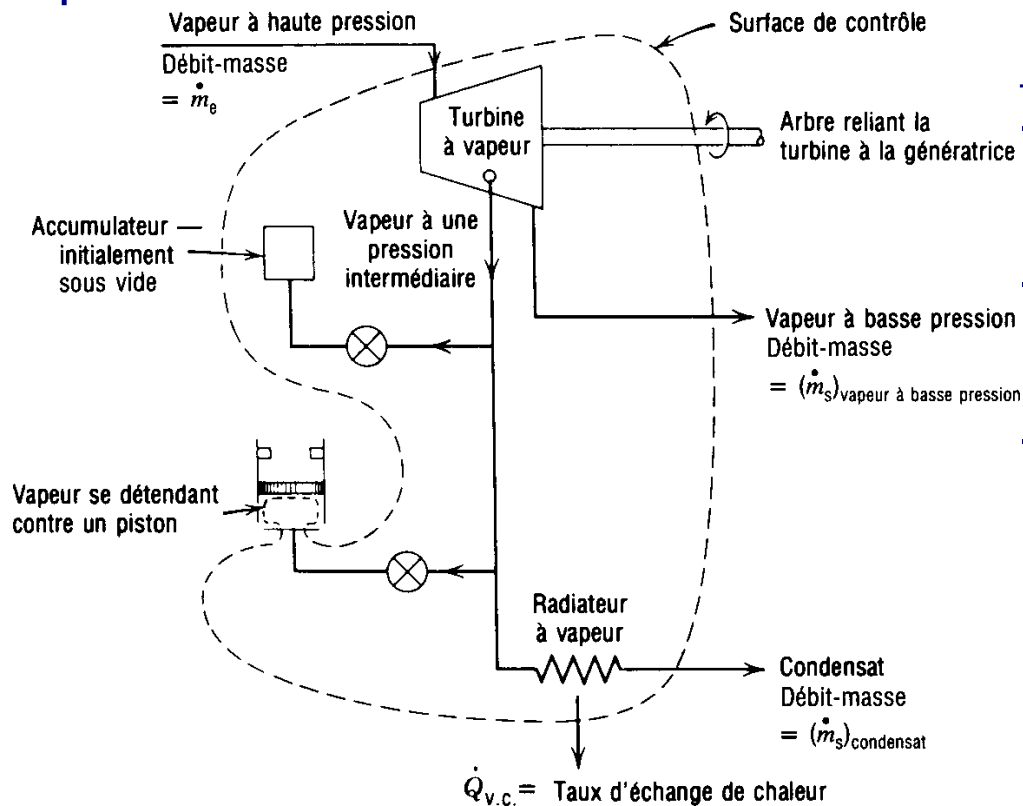
par l'intervalle de temps infinitésimal dt entre les deux états successifs, on obtient une équation pour le taux de variation de l'énergie du système, à savoir

$$\frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}) = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.20)$$

où \dot{Q} et \dot{W} sont respectivement le taux de transfert de chaleur et la puissance fournis au systèmes.

5.9 Conservation de la masse pour les systèmes ouverts

Si l'on néglige les phénomènes relativistes, alors la masse d'un système fermé (qui n'échange pas de matière avec le milieu extérieur) est constante. On se propose à présent d'en déduire les implications pour un système ouvert général, tel que celui représenté ci-dessous.



Remarques

- La frontière du système est une surface fermée.
- (Certaines parties de) la frontière peu(ven)t être mobile(s).
- (Certaines parties de) la frontière peu(ven)t être le siège d'échange de matière, de travail et de chaleur avec le milieu extérieur.

Considérons le système fermé F constitué de la matière contenue dans le système ouvert O au moment initial. Étant donné que ce nouveau système est fermé, sa masse doit rester constante. Comme, par définition de la masse volumique, $m_F = \int_{V_F} \rho dV$, où V_F est le volume (mobile) occupé par le système fermé (la matière initialement contenue dans le système ouvert), on a

$$\frac{dm_F}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho dV = 0$$

Cette expression peut se développer à l'aide des règles de dérivation des intégrales de volume sur volumes mobiles (vues en Mécanique des milieux continus).

$$\frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho dV = \int_{V_F} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_F} \rho \vec{b}_F \cdot \vec{n} dS$$

où \vec{b}_F est le vecteur vitesse de déplacement de la frontière du volume V_F . Le système étant fermé, cette vitesse doit être la vitesse de la matière $\vec{b}_F = \vec{c}$.

On a donc

$$\frac{dm_F}{dt} = \int_{V_F} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_F} \rho \vec{c} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5.21)$$

Mais par ailleurs, la dérivée par rapport au temps de la masse contenue dans le système ouvert O est donnée par

$$\frac{dm_O}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_O} \rho dV = \int_{V_O} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{S_O} \rho \vec{b}_O \cdot \vec{n} dS \quad (5.22)$$

où \vec{b}_O est le vecteur vitesse de déplacement de la frontière du système ouvert O . En combinant ces deux expressions, compte tenu du fait qu'à l'instant initial, $V_F = V_O = V$ et $S_F = S_O = S$, on obtient

$$\frac{dm_F}{dt} = \frac{dm_O}{dt} + \oint_S \rho (\vec{c} - \vec{b}_O) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (5.23)$$

Mais pour toute partie Σ de la surface S

$$\oint_{\Sigma} \rho(\vec{c} - \vec{b}_O) \cdot \vec{n} dS = \dot{m} (= q_m)$$

est le débit traversant cette partie. On obtient donc finalement en désignant par l'indice s les parties de S traversées par un débit sortant et par l'indice e les parties traversées par un débit entrant

$$\frac{dm_O}{dt} + \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \quad (5.24)$$

Cette équation est communément appelée **équation de continuité**.

Dans le cas particulier d'un système en régime permanent, cette équation se réduit à

$$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \quad (5.25)$$

qui exprime l'égalité des débits entrants et sortants.

5.10 Le premier principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts

On déduira à présent la forme du premier principe applicable aux systèmes ouverts en suivant la même procédure. Appliquons la forme temporelle du premier principe (5.20)

$$\frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}) = \dot{Q}_F + \dot{W}_F$$

au système fermé F considéré à la section précédente.

Tout d'abord, développons l'expression du membre de gauche en appliquant les règles de dérivation des intégrales de volume :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_F &= \frac{d}{dt} \int_{V_F} \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) dV = \\ &= \int_{V_F} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right\} dV + \oint_{S_F} \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \vec{c} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant la même relation au calcul du taux de variation de

l'énergie totale du système ouvert O , on a

$$\frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O = \frac{d}{dt} \int_{V_O} \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) dV =$$

$$\int_{V_O} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \right\} dV + \oint_{S_O} \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) \vec{b}_O \cdot \vec{n} dS$$

Combinant avec la relation précédente, on obtient, à l'instant initial

$$\frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_F = \frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O + \oint_S \rho \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right) (\vec{c} - \vec{b}_O) \cdot \vec{n} dS$$

$$= \frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O + \sum \dot{m}_s \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e$$

en supposant les propriétés uniformes sur les sections d'entrée et de sortie.

Par ailleurs, analysons la puissance reçue aux sections d'entrée et de sortie (puissance d'écoulement ou de transvasement). Du fait que ces sections sont mobiles (avec une vitesse \vec{c} pour le système fermé et \vec{b}_O pour le système ouvert)

$$\begin{aligned}\dot{W}_{F,e} &= - \int_{S_e} p \vec{c} \cdot \vec{n} \, dS = - \int_{S_e} \frac{p}{\rho} \rho \vec{c} \cdot \vec{n} \, dS = \sum \dot{m}_e \left(\frac{p}{\rho} \right)_e - \int_{S_e} p \vec{b}_O \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \sum \dot{m}_e \left(\frac{p}{\rho} \right)_e + \dot{W}_{O,e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{W}_{F,s} &= - \int_{S_s} p \vec{c} \cdot \vec{n} \, dS = - \int_{S_s} \frac{p}{\rho} \rho \vec{c} \cdot \vec{n} \, dS = - \sum \dot{m}_s \left(\frac{p}{\rho} \right)_s - \int_{S_s} p \vec{b}_O \cdot \vec{n} \, dS \\ &= - \sum \dot{m}_s \left(\frac{p}{\rho} \right)_s + \dot{W}_{O,s}\end{aligned}$$

En rassemblant les divers termes, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O + \sum \dot{m}_s \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e \\ = \dot{Q}_F + \dot{W}_O - \sum \dot{m}_s \left(\frac{p}{\rho} \right)_s + \sum \dot{m}_e \left(\frac{p}{\rho} \right)_e \end{aligned}$$

ou encore, en faisant passer les termes de pression du membre de droite au membre de gauche,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O + \sum \dot{m}_s \left(\underbrace{u + \frac{p}{\rho}}_h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(\underbrace{u + \frac{p}{\rho}}_h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e \\ = \dot{Q}_F + \dot{W}_O = \dot{Q}_O + \dot{W}_O \end{aligned}$$

puisque $\dot{Q}_F = \dot{Q}_O$, ce qui est l'expression cherchée du premier principe pour les systèmes ouverts.

L'expression finale est donc

$$\frac{d}{dt} (U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}})_O + \sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.26)$$

Dans le cas particulier d'un système en régime permanent, elle se réduit à

$$\sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.27)$$

et, pour le cas d'une seule entrée et d'une seule sortie,

$$\dot{m} \left[\left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e \right] = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.28)$$

puisque dans ce cas, $\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m}$ est le débit traversant le système.

5.11 Les systèmes ouverts en régime permanent

Pour la commodité, on rappellera ici les résultats établis pour les systèmes ouverts en régime permanent. Ce cas constitue un modèle adéquat pour décrire le fonctionnement en régime de bon nombre de dispositifs comme les compresseurs, turbines, vannes, tuyères, échangeurs de chaleur. Ces systèmes se caractérisent par les propriétés suivantes :

1. la frontière du système est immobile ;
2. les propriétés (vitesse, variables thermodynamiques) en chaque point du système sont indépendantes du temps ;
3. les débits de masse à chaque section d'entrée et de sortie, et les propriétés sur chacune de ces sections sont indépendantes du temps ;
4. le taux de transfert de chaleur et la puissance reçues par le système sont indépendants du temps.

Dans ces conditions, les équations de conservation s'écrivent

$$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \quad (5.29)$$

$$\sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.30)$$

Remarquons que, du fait que les sections d'entrée et de sortie sont fixes, comme toutes les autres parties de la frontière du système, aucun travail de pression n'est effectué sur ces sections.

Dans le cas particulier d'une seule entrée et d'une seule sortie, ces expressions se simplifient en

$$\dot{m}_s = \dot{m}_e = \dot{m} \quad (5.31)$$

$$\dot{m} \left[\left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e \right] = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.32)$$

En divisant cette dernière expression par le débit \dot{m} , on obtient

$$\left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_s - \left(h + \frac{c^2}{2} + gz\right)_e = q + w \quad (5.33)$$

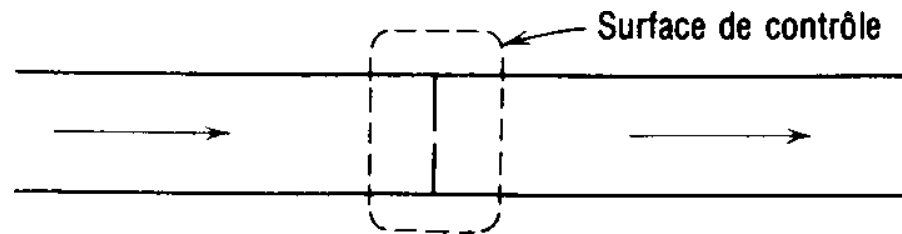
où q et w sont la chaleur et le travail reçus par unité de masse

$$q = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}; \quad w = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} \quad (5.34)$$

On emploie souvent ce modèle pour l'analyse des machines volumétriques telles que les compresseurs ou moteurs volumétriques. Or, pour ces systèmes, le débit est variable, de même que chaleur et travail échangés. On se place dans les conditions d'application du modèle en considérant des valeurs moyennes pour un nombre entier de cycles mécaniques.

5.12 La détente à travers une vanne et le coefficient de Joule-Thomson

Considérons la détente à travers une vanne, telle que celle employée dans la machine frigorifique à compression de vapeur décrite dans l'introduction (1.3). Une telle vanne s'apparente à un diaphragme tel que représenté ci-dessous.



Le système est supposé en régime permanent et ne reçoit aucun travail. De plus, ses dimensions sont tellement faibles qu'on peut raisonnablement supposer que le transfert de chaleur est négligeable. Négligeant également l'énergie potentielle, on a alors

$$h_e + \frac{c_e^2}{2} = h_s + \frac{c_s^2}{2}$$

Si le fluide détendu est un gaz, la chute de pression s'accompagne d'une diminution de masse volumique et, par conservation du débit, d'une augmentation de vitesse. L'augmentation correspondante d'énergie cinétique est souvent négligeable, de sorte que

$$h_e \approx h_s$$

La variation de température à travers la vanne est alors caractérisée par le coefficient de Joule-Thomson μ_J défini par

$$\mu_J = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_h \quad (5.35)$$

Un coefficient de Joule-Thomson positif signifie alors que la température diminue à travers la vanne (puisque la pression diminue), alors qu'elle augmente si le coefficient de Joule-Thomson est négatif.

5.13 Systèmes ouverts avec écoulement uniforme

On considère ici un autre modèle simplifié qui s'applique à certaines transformations non permanentes de systèmes ouverts. Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes :

1. la frontière du système est immobile ;
2. les propriétés de la matière dans le système peuvent varier dans le temps mais sont supposées uniformes dans tout le système, ou du moins dans des parties identifiables du système dont le système est l'union ;
3. les propriétés dans les sections d'entrée et de sortie sont constantes dans le temps, mais les débits peuvent varier.

Dans ces conditions, les équations générales applicables aux systèmes fermés

établies précédemment deviennent

$$\frac{dm_O}{dt} + \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0 \quad (5.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{m \left(u + \frac{c^2}{2} + gz \right)}_{U + E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}} \right]_O + \sum \dot{m}_s \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_s - \sum \dot{m}_e \left(h + \frac{c^2}{2} + gz \right)_e = \dot{Q} + \dot{W} \quad (5.37)$$

En intégrant ces expressions dans le temps entre un état initial 1 et un état final 2, on obtient

$$m_2 - m_1 + \sum m_s - \sum m_e = 0 \quad (5.38)$$

$$m_2 \left(u_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 \right) - m_1 \left(u_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 \right) + \sum m_s \left(h_s + \frac{c_s^2}{2} + gz_s \right) - \sum m_e \left(h_e + \frac{c_e^2}{2} + gz_e \right) = Q_O + W_O \quad (5.39)$$

où m_s et m_e sont respectivement la masse totale ayant traversé les sections d'entrée et de sortie, et Q_o et W_o les chaleur et travail reçus par le système au cours de la transformation.