EXERCICES
D'ANALYSE ET METHODES NUMERIQUES GR-EA

2012-2013

s.ACHAKIR

0.1 INTERPOLATION

I- Interpolation

EXERCICE. 1 :
On donne $x_0 = 1$ et $h = \frac{1}{4}$ et $x_i = x_0 + ih$ pour i=0,1,2. et $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{3}{2}$.

(a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_2 ($P_2(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$) à l'aide :

i. des déterminants

ii. de Lagrange

iii. des différences divisées

iv. de Néville-Aitken

v. de Newton

EXERCICE. 2 :
On considère la fonction $y = \frac{1+x}{1+x^2}$ et le pas $h = 0.5$. On donne le tableau des valeurs suivant :

0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000
1.0000	1.2000	1.0000	0.7692	0.6000

(a) Construire P_4 le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

(b) Calculer y=f(1.75) et $z = P_4(1.75)$

(c) Comparer l'erreur théorique absolue $|E_4(1.75)|$ et l'erreur pratique absolue $|y - z|$.

EXERCICE. 3 :
Soit P_n le polynôme interpolant f aux abscisses distinctes deux à deux, $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
On pose $D(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.
Déterminer les coefficients a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ tels que :

$$\frac{P_n(x)}{D(x)} = \frac{a_0}{x - x_0} + \frac{a_0}{x - x_0} + \frac{a_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

EXERCICE. 4 :
Soit f(x)=$e^{-\frac{x^2}{2}}$. On considère les abscisses équidistantes suivantes : $x_0 = 1$ et $x_i = x_0 + h$

et h=0.5. On se propose d'évaluer f, P_3 et $EP_3(x) = f - P_3$ et $ET_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x - x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ en x=1.25 et de comparer les erreurs pratique EP_3 et théorique ET_3.

(a) Calculer f(1.25)

(b) Construire le polynôme d'interpolation de Newton P_3 et calculer $P_3(1.25)$

(c) Calculer $|EP_3(1.25)|$

(d) Montrer que $\exists c \in]min(x_i), max(x_i)[, \quad ET_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Déterminer une bonne majoration de $|ET_3(1.25)|$

(e) Comparer les erreurs $|EP_3(1.25)|$ et $|ET_3(1.25)|$.

EXERCICE. 5 :
On suppose la fonction f connue aux points $\{-1;0;1\}$ où elle prend les valeurs $\{2;3;6\}$ et soit P_m l'ensemble des polynômes de degré au plus m. Quelle est la valeur minimale de m qui conduit à une technique d'interpolation ? Pour quelle valeur de m le polynôme d'interpolation est unique ?

EXERCICE. 6 :
Soit f une fonction telle que f(0)=$\frac{1}{2}$, f(0.5)=1, f(1)=2, f(1.5)=$-\frac{1}{2}$ Calculer les coefficients du polynôme d'interpolation P_3 dans la base de Newton.

EXERCICE. 7 :
Construire le polynôme d'interpolation pour les valeurs suivantes, on écrira sa forme factorisée de Hörner.

x	1	2	4	5
y	1	4	16	25

EXERCICE. 8 :
Montrer que lorsque les abscisses sont équidistantes, et que q=$\frac{x-x_0}{h}$, l'erreur d'interpolation s'écrit :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}q(q-1)(q-2)\dots(q-n)$$

. **EXERCICE. 9 :**
Soit a<b et posons $x_0 = a$, $x_1 = a+\epsilon$, $x_2 = b$, $\epsilon > 0$.Soit f une fonction définie en ces trois points.

(a) Ecrire $P_2(x)$ le polynôme de Lagrange interpolant f en ces trois points.

(b) En faisant tendre ϵ vers 0

i. Monter $P_2(x) = \frac{(b-x)(x+b-2a)}{(b-a)^2}f(a) + \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}f(b)$

ii. Monter que $f(x) - P_2(x) = \frac{1}{6}(x-a)^2(x-b)f^{(3)}(c)$ Qu'est ce que vous pouvez conclure ?

0.2 DERIVATION

II- Dérivation numérique

EXERCICE. 1 :

Soit f(x)=xln(1+x). Soient les points $x_0 = 1,\ x_1 = 1.01,\ x_2 = 1.02$.

(a) Calculer $f(x_k), \quad k = 0, 1, 2$

(b) Calculer les valeurs exactes $f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2$

(c) Calculer les valeurs approchées $f'_k, \quad k = 0, 1, 2$ des dérivées $f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2$ en utilisants les formules à trois points.

(d) évaluer les erreurs pratiques absolues $|f'_k - f'(x_k)|, \quad k = 0, 1, 2$ et les comparer aux erreurs théoriques absolues.

EXERCICE. 2 :

Dans une équation diffférentielle on désigne en un point x_k , la valeur exacte par $y(x_k)$ et la valeur approchée par y_k .

(a) Décrire un schéma approché qui permet de résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} 2y'' + y' - 3y = xe^{-x}, \quad x \in [0, 1] \\ \text{y(0)=1}, \quad \text{y'(0)=0} \end{cases}$$

(b) Pour le pas h=$\frac{1}{4}$, calculer les valeurs approchées y_k et les valeurs exactes $y(x_k)$

(c) Calculer les erreurs absolues $|y_k - y(x_k)|$ pour différentes valeurs de k.

0.3 QUADRATURE

III- Quadrature

EXERCICE. 1 :

Calculer à l'aide du logiciel Matlab et à l'aide des méthodes des trapèzes, Romberg et Simpson l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

EXERCICE. 2 :

Soit $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ et $I_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$. On a alors $I_n = I_{n-1} + \int_{n-1}^n e^{-x^2} dx$. Une table de valeurs donne $I_2 = 0.88208139076242$.

(a) Considérons la formule d'intégration suivante :

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(0) + \beta f\left(\frac{1}{3}\right) + \gamma f\left(\frac{2}{3}\right) + \delta f(1) + R(f)$$

Trouver α, β, γ, et δ, tels que cette formule soit exacte sur l'espace vectoriel des polynômes de degré le plus élevé possible. Par un changement de variables, donner la formule sur l'intervalle quelconque [a, b] .

(b) Calculer par la formule de quadrature trouvée en 1) les intégrales $\int_2^3 e^{-x^2} dx$ et $\int_3^4 e^{-x^2} dx$

(c) En déduire I_3et I_4

(d) On pose $f(\frac{1}{n}) = I_n$. On a alors $\lim_{n\to\infty} I_n = f(0) = I$. Interpoler f par le polynôme P sur les données :$(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})), (\frac{1}{3}, f(\frac{1}{3})), (\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4}))$ et calculer P(0).

EXERCICE. 3 :

(a) Déterminer A_0, A_1, A_2, A_3 tels que la relation :

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = (2h)^{\frac{1}{2}} (A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(2h) + A_3 f(3h)) + R(f), \quad h = \frac{2\pi}{3}$$

soit exacte (i.e. R(f) = 0) sur l'espace vectoriel des polynômes de degré le plus élevé possible. On précisera ce degré.

(b) Calculer exactement $\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$, en intégrant d'abord par parties, puis par changement de variable. Calculer approximativement cette intégrale par la méthode qui précède. Comparer ce résultat à celui que l'on obtient par la méthode de Simpson

(on calculera $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+x)}{\sqrt{x}}$

(c) Expliquer pourquoi le résultat obtenu par la méthode de Simpson est mauvais.

EXERCICE. 4 :

On se propose de calculer $I = \int_{-1}^{+1} e^{-x^2}(1+x^2)dx$

(a) Calculer approximativement I par la méthode des trapèzes à trois points correspondant au pas h_0 , puis avec le pas $h_1 = \frac{h_0}{2}$ et enfin avec le pas $h_2 = \frac{h_1}{2}$

(b) Calculer une approximation de I à l'aide des résultats trouvés en (a) et à l'aide de la méthode de Romberg.

(c) Calculer approximativement I par construction de la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} f(x)(1+x^2)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

x_1, x_2, A_1, A_2 sont distincts et non nuls.

(d) On suppose $R(f) = K f^{(4)}(c)$, $c \in [-1, +1]$. Déterminer K à l'aide de f(x)=x^4.

(e) comparer ces différentes méthodes.

0.4 EQUATIONS

IV- Equations

EXERCICE. 1 :

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E): \quad f(x) = x + 1 - \frac{x}{3} e^x$$

(a) Calculer f′ et f"

(b) A l'aide du tableau des variations de f, localiser ces racines entre deux entiers consécutifs.

(c) On considère les méthodes itératives suivantes

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n}{3}e^{x_n} - 1 \\ x_{n+1} &= 3e^{-x_n}(x_n+1) \end{aligned}$$

i. Vérifier que si ces méthodes convergent alors elles convergent vers la solution de (E)

ii. Préciser alors l'intervalle sur lequel le théorème du point fixe s'applique, et, dans ce cas,déterminer combien d'itérations seront, à priori, nécessaires pour obtenir une erreur absolue inférieure à 5.10^{-7}.Calculer dans chaque cas deux itérés à partir d'un x_0 admissible.

(d) Ecrire la méthode de Newton pour résoudre (E). Pour chaque solution, justifier le choix de x_0 et calculer deux itérés. A partir des valeurs approchées obtenues, donner, si possible, une estimation des solutions.

(e) Ecrire la méthode de Newton pour trouver une approximation de la valeur μ où f admet un maximum.Calculer une estimation de ce maximum.

<u>EXERCICE</u>. 2 :

On se propose de résoudre l'équation

$$f(x) = e^{-x} - x + 1 = 0$$

dans l'intervalle [1 ;2].

(a) Montrer que f admet f^{-1} sa fonction réciproque.

(b) Soit $x_\star$ sa solution dans [1 ;2].Calculer $x_\star$ par la méthode de Newton-Raphson et par la méthode de la sécante.

(c) Soit $x_\star$ sa solution dans [1 ;2]. Soit l'algorithme,
$x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$
$P_2^{(n)}(x)$ interpole f^{-1} en $f(x_{n-3}), f(x_{n-2}), f(x_{n-1})$
$x_n = P_2^{(n)}(0)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$
Estimer l'erreur absolue $|x_n - x_\star|$ commise en approchant $x_\star$ par x_n.

<u>EXERCICE</u>. 3 :

Soit (x_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = G(x_n) \end{cases}$$

On suppose que(x_n)converge vers $x_\star$solution de f(x)=0 dans [a,b]. on suppose aussi que cette méthode est d'ordre un.

On pose $A = G'(x_\star)$ et on suppose que 0<A<1. On pose aussi $e_n = x_n - x_\star$
et $e_{n+1} = (A + \epsilon_n)e_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

(a) Montrer que $e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n = ((A-1)^2 + \theta_n)e_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$

(b) On pose $x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$.
Montrer que $\frac{x'_n - x_\star}{x_n - x_\star} = \frac{\theta_n - 2\epsilon_n(A-1) - \epsilon_n^2}{(A-1)^2+\theta_n}$

(c) Que vaut $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x'_n - x_\star}{x_n - x_\star}$?

EXERCICE. 4 :

On se propose de déterminer la racine cubique de 5. Soit (E) :$x^3 = 5$.
Soit les fonctions f(x)=$x^3 - 5$ et $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x^2}\right)$.

(a) Vérifier que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$

(b) On prend $\sqrt{\frac{5}{3}} = 1.2910$. Calculer f(1.2910) et f(-1.2910). Montrer que f admet une seule racine à localiser entre deux nombres entiers consécutifs a et a+1.

(c) Soit l'algorithme de Newton-Rafson :
$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$
Calculer $\underbrace{max(|f'(x)|)}_{[a,a+1]}$. Déterminer n pour que $|x_n - \sqrt[3]{5}| \leq 10^{-6}$.
Si on a calculé x_n , montrer que l'application du théorème des accroissements finis à f dans $[x_n, \sqrt[3]{5}]$ permet de trouver une majoration de l'erreur $|x_n - \sqrt[3]{5}|$.

(d) Etudier la forme itérative Φ sur $[a+0.5, a+1]$.

(e) En déduire que Φ est une contraction sur $[a+0.5, a+1]$.

(f) Soit l'algorithme itératif :
$$\begin{cases} u_0 = 1.5 \\ u_{n+1} = \Phi(u_n) \end{cases}$$
Déduire à partir de la question précédente la nature de cet algorithme.

(g) Rassembler dans un même tableau les valeurs
$n, x_n, u_n, |x_{n+1} - x_n|, |u_{n+1} - u_n|, f(x_n), f(u_n), |x_n - u_n|$
sachant que $n \leq 4$.

(h) Donner une interprétation du tableau ci-dessus.

0.5 EQUATIONS DIFFERENTIELLES

V- Equations différentielles

EXERCICE. 1 :

Soit le problème de Cauchy suivant :
$$(P.C.) : \begin{cases} y' = ycos(x), & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y_0 = y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) On pose f(x,y)=ycos(x). Montrer que f est lischitzienne en y uniformément par rapport à x
et calculer la constante L de Lipschitz.

(b) Trouver explicitement y(x), c'est à dire la valeur exacte.

(c) Calculer $C = \frac{M}{2L}\left(e^{(b-a)L} - 1\right)$ où M=$\underbrace{sup(|y''(x)|)}_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

(d) Drésser un tableau numérique contenant les quantités :
$x_i, y(x_i), y_i, y_i - y(x_i), Ch$ avec h=$\frac{\pi}{8}$
Donner une interprétation de ce tableau.

EXERCICE. 2 :
Montrez que pour l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y' = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ \sqrt{y} & \text{si } \quad y \geq 0 \end{cases}$$

il n'y a pas unicité au probème de Cauchy. Pourquoi ?

EXERCICE. 3 :
Intégrer numériqument à l'aide des méthodes (Euler, Taylor et une méthode de Runge-Kutta) :

$$(P.C.) : \quad \begin{cases} y' = \frac{1}{1+x^2}, & x \in [0;1] \\ y_0 = y(0) = 1, & h = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Que peut-on conclure ?

EXERCICE. 4 :
Soit le problème de Cauchy

$$(P.C.) : \quad \begin{cases} y' = \frac{1-xy}{x^2}, & x \in [1;2] \\ y_0 = y(1) = 0 \end{cases}$$

(a) On pose f(x,y)=$\frac{1-xy}{x^2}$. Montrer que f est lischitzienne en y uniformément par rapport à x
et calculer la constante L de Lipschitz.

(b) Trouver explicitement y(x), c'est à dire la valeur exacte.

(c) Calculer (avec 4 décimales) $C = \frac{M}{2L}\left(e^{(b-a)L} - 1\right)$ où M=$\underbrace{sup(|y''(x)|)}_{[1;2]}$.

(d) Drésser un tableau numérique contenant les quantités :
$x_i, y(x_i), y_i, y_i - y(x_i), Ch$ avec h=$\frac{1}{8}$
Faites une interprétation de ce tableau.

0.6 SYSTEMES

VI- Systèmes

EXERCICE. 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la méthode de Gauss avec stratégie du pivôt total le système linéaire suivant :

$$(S):\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Reprendre l'exercice à l'aide de la décomposition LU de Doolittle. **EXERCICE. 2 :**

(a) Inverser par l'algorithme de Gauss avec stratégie du pivôt partiel la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -6 & 7 \\ 11 & 17 & 44 \\ 12 & 1 & 86 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $P_A(x)$ le polynôme caractéristique de A. Déterminer à l'aide de la méthode de Newton-Rafson
toutes les racines réelles de $P_A(x)$ appelées valeurs propres de A.

(c) En utlisant l'algorithme de Gauss, chercher les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres de A trouvées ci-dessus.

EXERCICE. 3 :

Résoudre à l'aide des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel le système linéaire :

$$(S):\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 31 \end{pmatrix}$$

EXERCICE. 4 :

On considère le système linéaire suivant :

$$(S):\quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la solution exacte à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss.

(b) Calculer les vecteurs $u^{(n)} = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)})\, 1 \leq n \leq 10$,obtenus par les méthodes itératives de Gauss-Seidel et de Jacobi sachant que $u^{(0)} = 0$.

EXERCICE. 5 :

Etant donnée une matrice définie positive décomposée sous la forme A=D-E-F où D est diagonale, E triangulaire inférieure à diagonale nulle et F triangulaire supérieure à diagonale nulle, on considère le système linéaire :

$$AU = B$$

Etant donné le vecteur initial $u^{(0)}$, on définit la suite $u^{(n)}$ par :

$$(D-E)u^{(n+\frac{1}{2})} = Fu^{(n)} + B$$

$$(D-F)u^{(n+1)} = Eu^{(n+\frac{1}{2})} + B$$

Ecrire les vecteurs $u^{(n+1)}$ sous la forme $u^{(n+1)} = Gu^{(n)} + H$ en explicitant la matrice G et le vecteur H.

EXERCICE. 6 :
Résoudre à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan le système linéaire :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

EXERCICE. 7 :
Résoudre à l'aide de laméthode de Newton-Rafson les systèmes non liéaires :

(a) $\begin{cases} -5x_1 + 2sin(x_1) + 2cos(x_2) = 0 \\ 2cos(x_1) + 2sin(x_2) - 5x_2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ 3x_1x_2 + 1 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} (x_1+1)(x_1+x_2)^2 = 16x_1^2 \\ (x_1+x_2)^2(x_2^2+1) = 9x_2^2 \end{cases}$

Dieu, dans sa colère, pour punir les humains, envoya sur la Terre les mathématiciens.

EXERCICE. 8 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

(a) Donner la décomposition LU (de Doolittle) de A

(b) En déduire la solution de AX=B, où ${}^tB = (1.5, 4, -14, -6.5)$

(c) Soit $C = {}^t UA^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner la décomposition LU de la matrice C

EXERCICE. 9 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

(a) Donner la décomposition LU (de Doolittle) de A

(b) En déduire la solution de AX=B, où ${}^tB = (0, 2, -1, 5)$

(c) Sans calculer A^2 , résoudre $A^2X = B$.

0.7 Meilleure approximation

VII- Approximation au sens des moindres carrés

EXERCICE. 10 :

A partir des points suivants,

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	1	6	18	34	57	83

déterminer les polynômes de degré k = 1 et ensuite de degré k = 2 qui minimisent la distance aux points au sens des moindres carrés

$$\sum_{i=1}^{n}(p_k(x_i) - y_i)^2$$

Dans les deux cas, évaluer cette dernière somme pour donner la valeur minimale. Rép. : k = 1, $p_1(x)$ = 24.73 + 16.54x. La somme vaut 265.67. k = 2, $p_2(x) = 0.1 - 2.08x + 2.66x^2$. La somme vaut 1.379. Le polynôme de degré 2 est donc sensiblement une meilleure approximation au sens des moindres carrés. 2. On peut faire de la régression pour une fonction de deux variables. A partir de données sous la forme $(x_i; y_i; f(x_i; y_i)); i = 1; 2; \ldots n$, on cherche le polynôme de deux variables $p_1(x; y) = a_0 + a_1x + a_2y$ qui minimise :

$$\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2y_i - f(x_i; y_i))^2$$

(a) Déterminer le système linéaire permettant de déterminer les coefficients a_i. (b) On peut appliquer la méthode préecédente dans le cas où l'on cherche les coefficients a, b et c tels que :

$$q = ax^by^c$$

Suggestion : se ramener au cas précédent par un changement de variables. (c) Résoudre avec les données suivantes :

x_i	1	2	3	1	2	3	1	2	3
y_i	0.001	0.001	0.001	0.01	0.01	0.01	0.05	0.05	0.05
q_i	1.4	8.3	24.2	4.7	28.9	84	11.1	69	200

Rép. : a = 55.9, b = 2.62 et c = 0.54.

► FIN ◄

0.8 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

INTERPOLATION

EXERCICE. 1 :

1. Ecrire le polynôme d'interpolation P_3 de la fonction f(x)=$ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour les abscisses d'interpolation suivantes : $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$.
2. Calculer la valeur approchée $P_3(\pi)$ et la valeur exacte $ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
3. Comparer ces deux valeurs par utilisation du théorème donnant l'erreur d'interpolation.
4. Calculer la valeur approchée $P_3'(4)$ et la valeur exacte $f'(4)$.

5. Comparer ces deux valeurs

QUADRATURE NUMERIQUE

EXERCICE. 1 :

Soit la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = A\left(f(-1) + 2f(x_1) + 3f(x_2)\right) + R(f)$$

1. Déterminer A pour que cette formule soit exacte sur $\mathbb{R}_0[x]$.
2. Déterminer x_1, et x_2 pour que cette formule soit exacte sur $\mathbb{R}_n[x]$, où n est le plus élevé possible. Quel est ce n ?
3. Calculer par cette formule une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{1}{1+x^2}dx$ et la comparer à la valeur exacte.

EXERCICE. 2 :

Soit la formule de quadrature suivante :

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = Af\left(-\frac{3}{5}\right) + Bf\left(\frac{3}{5}\right) + Cf\left(-\frac{1}{5}\right) + Df\left(\frac{1}{5}\right) + R(f)$$

1. Déterminer x_1, et x_2 pour que cette formule soit exacte sur $\mathbb{R}_n[x]$, où n est le plus élevé possible. Quel est le degré de précision de cette formule, c'est à dire n ?
2. Calculer par cette formule une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{x}{1+x^2}dx$ et la comparer à la valeur exacte.

INTEGRATION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE. 1 :

Pour résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in [0,1] \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

f possédant toutes les propriétés nécessaires à cette étude, on considère le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h\left(f(x_n,y_n) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n)f(x_n,y_n)\right)\right) \end{cases}$$

h est le pas d'intégration.

1. Montrer que ce schéma est d'ordre 2.
2. Application au problème : $\begin{cases} y' = -y, \quad x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

RESOLUTION DES EQUATIONS ET DES SYSTEMES D'EQUATIONS

EXERCICE. 1 :

Soit l'équation $x = ln(1+x) + 0.2$ dans $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que la méthode itérative définie par $\Phi(x) = ln(1+x) + 0.2$ est convergente.
2. Pour $x_0 = 4$, calculer x_n avec le test d'arrêt $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-8}$.

EXERCICE. 2 :

Pour x>0, $f(x) = ln(x) + x^2 - 2x + 5$.

1. Localiser la seule racine r de f(x)=0 entre deux entiers cosécutifs a et a+1.
2. Pour trouver une approximation de r, on pose :
   $\begin{cases} x_0 \in [a, a+1] \\ x_{n+1} = x_n - f(x_n) \end{cases}$
   Montrer que cette suite ne converge pas vers r.
3. On propose alors la méthode définie par :
   $\begin{cases} x_0 \in [a, a+1] \\ x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n) \end{cases}$
   Quelles sont les valeurs de α qui assure la convergence de cette suite vers r quel que soit $x_0 \in [a, a+1]$.
   Quelle est la valeur de α pour laquelle $\underbrace{max(1 - \alpha f'(x))}_{[a,a+1]}$ est le plus petit possible.
4. La méthode définie par :
   $\begin{cases} x_0 \in [a, a+1] \\ x_{n+1} = \frac{5 - ln(x_n)}{x_n + 2} \end{cases}$
   converge-t-elle vers r ?
5. Ecrire la méthode de Newton pour f(x)=0. Quels choix de x_0 faites-vous pour assurer la convegence ?

Table des matières