

DYNAMIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

BNIAICHE EL Amine

ITSMAERB

Département : « *Gestion & Maîtrise de l'Eau* »

2013

DYNAMIQUE DES FLUIDES

(ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES EN CHARGE)

I - Notions générales sur l'écoulement

II - Equation de continuité

III- Equation d'Euler

IV- Théorème de Bernoulli en écoulement parfait

V- Théorème de Bernoulli en écoulement réel

VI- Théorème de Bernoulli avec transfert d'énergie

VII- Puissances des écoulements

VIII- Régimes des écoulements: Nombre de Reynolds

VIII- Pertes de charge

1- Mise en évidence

2- Les Pertes de Charge Linéaires ou Réparties

3-- Les Pertes de Charge Locales ou Singulières

X- Applications de l'équation générale de l'écoulement

XI- Théorème d'Euler

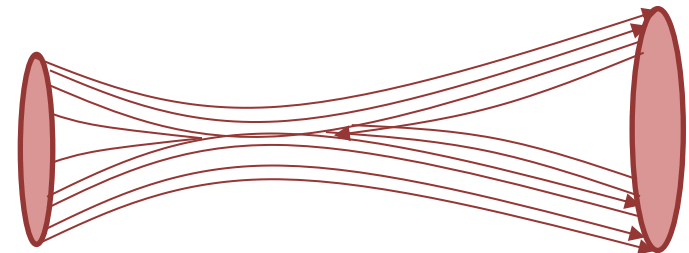
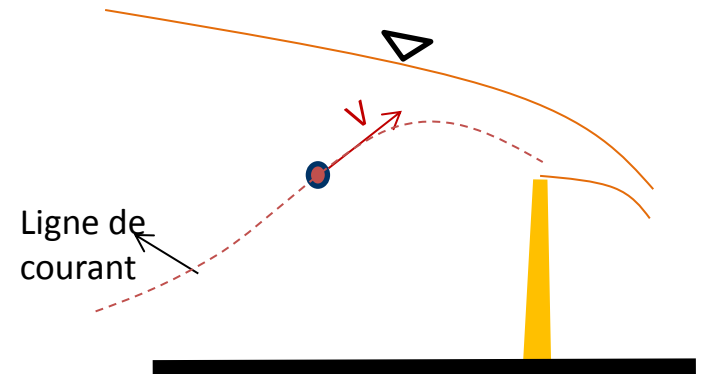
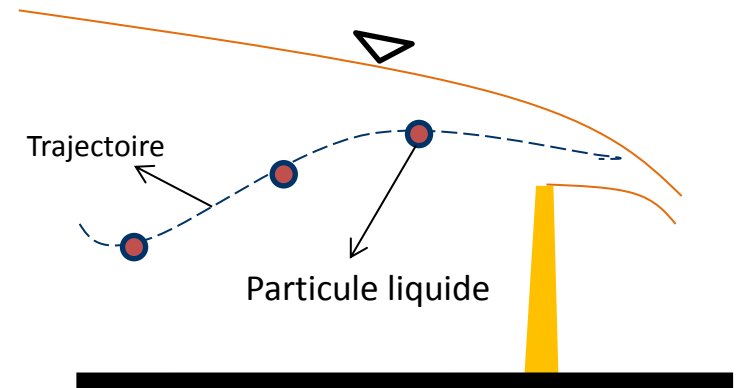
I- NOTIONS GÉNÉRALES SUR L'ÉCOULEMENT :

Le mouvement de d'une particule de fluide est caractérisée soit par:

- Ses coordonnées x, y, z, t tout le long de la trajectoire (méthode de LAGRANGE)
- Sa vitesse en un point donné de l'espace (méthode d'EULER)

1- Ligne de courant: Courbe tangente au vecteur vitesse (v_x, v_y, v_z) en tout point. La distance parcourue par la particule s'exprime par $dx=v_x dt, dy=v_y dt, dz=v_z dt$

2- Tube de courant (filet de courant): ensemble des lignes de courant défini par un contour fermé à l'intérieur de l'écoulement



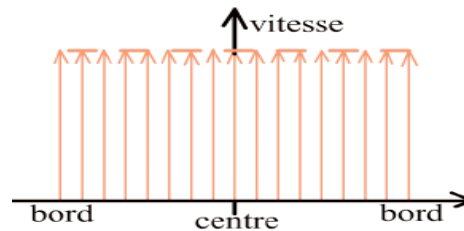
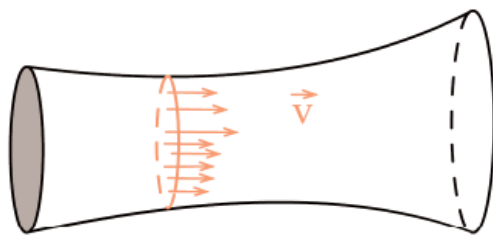
3- Écoulement permanent (stationnaire): la vitesse, la pression et le débit en un point quelconque du fluide sont indépendants du temps.

4- Écoulement variable : Si au moins un des paramètres d'écoulement varie dans le temps on dit que l'écoulement est variable ou non permanent..

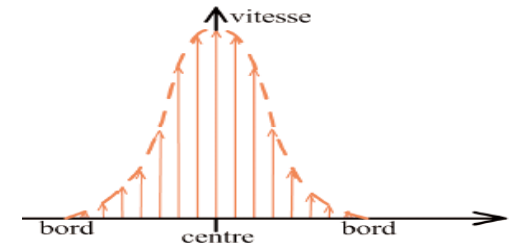
5- Écoulement unidimensionnel: Suppose que dans un tube de courant toutes les grandeurs liées à la particule (v , p , ρ , T) ont à un instant donné, la même valeur en tout point d'une section droite (pas de variation transversale)

6- Fluide parfait: Suppose que les lignes de courant ne se croisent pas et que la viscosité est nulle. Par ailleurs la vitesse est constante dans une section droite

7- Fluide réel: Suppose que les lignes de courant se croisent et que la viscosité n'est pas nulle. Par ailleurs la vitesse n'est pas constante dans une section droite



fluide parfait



fluide réel

8- Écoulement uniforme ou non uniforme : Un écoulement est dit uniforme si ses caractéristiques à tout instant demeurent constantes en différents points de la direction de l'écoulement. Si non l'écoulement est dit non uniforme.

Principes de conservation de la Physique

Principe de la conservation de la masse



l'EQUATION DE CONTINUITE

Principe de la conservation de la quantité de mouvement



EQUATION D'EULER



THEOREME DE BERNOULLI

II- EQUATION DE CONTINUITÉ:

« Conservation de la masse au cours de son déplacement dans un tube de courant »

Considérons un tube de courant permanent unidimensionnel et 2 sections droites quelconques dS_1 et dS_2 située aux abscisses respectives x_1 et x_2 .

Si aucune apparition ni aucune disparition de matière n'existe entre dS_1 et dS_2 on peut écrire:

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = Cste$$

$$dm_1 = \rho_1 dS_1 dx_1 = \rho_1 dS_1 v_1 dt$$

$$dm_2 = \rho_2 dS_2 dx_2 = \rho_2 dS_2 v_2 dt$$

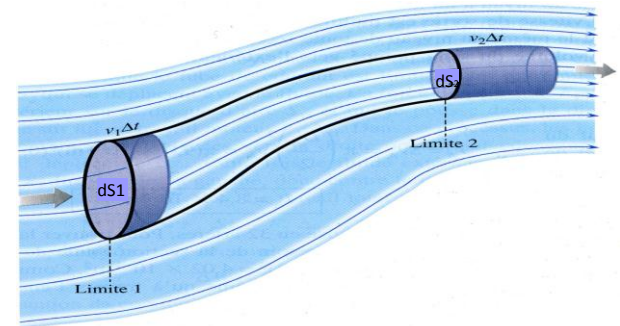
$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = \left. \rho_1 dS_1 v_1 = \rho_2 dS_2 v_2 = dq_m \right\} \text{débit massique}$$

En cas de fluide incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

divisons $\frac{dm}{dt}$ par ρ

$$\Rightarrow \frac{dm}{\rho dt} = \frac{dV}{dt}$$

$$dS_1 v_1 = dS_2 v_2 = dq_v \left. \right\} \text{débit volumique}$$



Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité montre que le produit de la section par la vitesse est constant tout le long d'un tube de courant

En cas de fluide parfait : $\mu = 0 \Rightarrow$ vitesse constante dans une section droite

$$d'o\grave{u} : q_v = v_1 \int_{S_1} dS_1 = v_2 \int_{S_2} dS_2$$

$$\Rightarrow q_v = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

En cas de fluide réel : $\mu \neq 0 \Rightarrow$ vitesse n'est pas constante dans une section droite

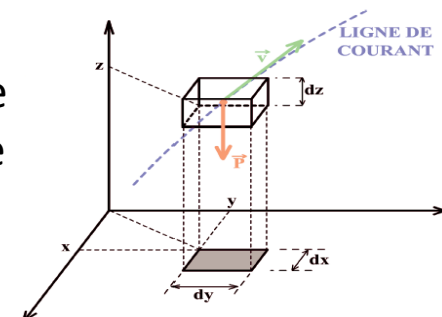
$$d'o\grave{u} : q_v = \int_{S_1} v_1 dS_1 = \int_{S_2} v_2 dS_2$$

$$\text{Vitesse moyenne dans une section : } v_m = \frac{1}{S} \int v dS$$

$$\text{Par conséquent : } q_v = v_{m1} S_1 = v_{m2} S_2$$

□ Généralisation à un écoulement permanent tridimensionnel

Examinons l'écoulement à travers un parall lep dique de volume dV (dx, dy, dz) dans les directions Ox, Oy et Oz et plaçons dans le cas général où la masse volumique ρ peut varier.



▪ **Masse en déplacement pendant dt selon l'axe Ox :**

$$dm_{x+dx} = dm_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \quad \text{avec } dm_x = \rho(v_x dt) dy dz$$

$$d'o\grave{u} : dm_{x+dx} = dm_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dt dz$$

accumulation de la matière :
$$\Delta m_x = dm_x + dm_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dVdt$$

▪ **Masse en déplacement pendant dt selon l'axe Oy:**

accumulation de la matière :
$$\Delta m_y = dm_y + dm_{y+dy} = -\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dVdt$$

▪ **Masse en déplacement pendant dt selon l'axe Oz:**

accumulation de la matière :
$$\Delta m_z = dm_z + dm_{z+dz} = -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dVdt$$

accumulation totale de la matière dans le volume dV :
$$\Delta m = \Delta m_x + \Delta m_y + \Delta m_z$$

La variation de la masse doit entraîner une variation de la masse volumique:

$$\Delta m = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$$

D'où:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equation de continuité pour un écoulement conservatif

Cas particuliers:

Ecoulement permanent : ρ ne dépend du temps

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Fluide incompressible : $\rho = \text{cste}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{ou } \text{div } \vec{v} = 0$$

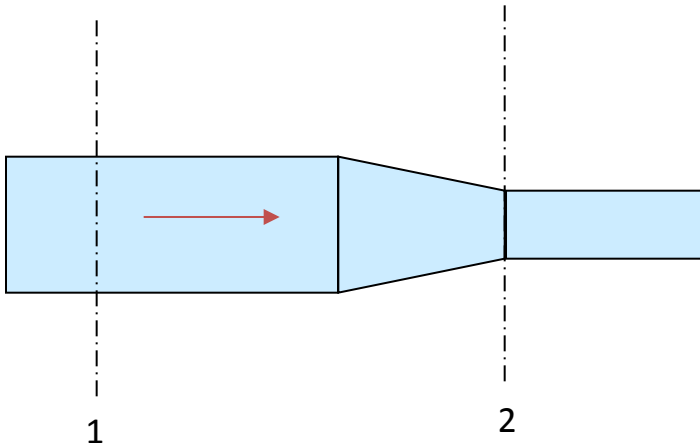
Fluide incompressible et écoulement unidimensionnel : $\rho = \text{cste}$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{en multipliant par } dV : \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dS = 0$$

$$\text{et l'intégration donne : } v_x dS = \text{Cste}$$

EXEMPLE DE CALCUL 1



Soit une conduite dont l'aire de la section 1 est $0,100 \text{ m}^2$ et la vitesse du liquide y est de $1,20 \text{ m/s}$; l'aire de la section 2 est de $0,050 \text{ m}^2$.

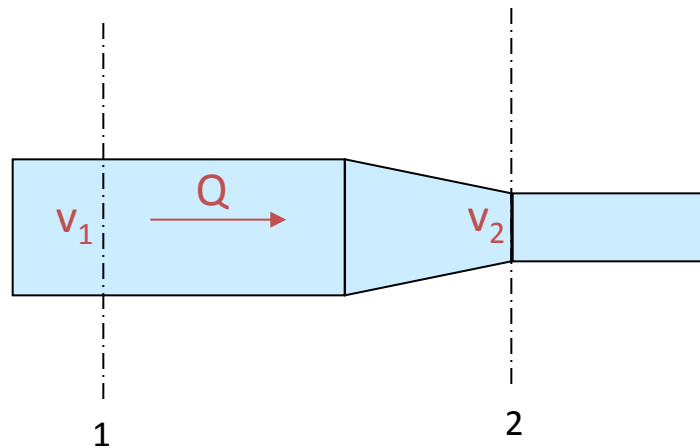
Calculer la vitesse du courant en 2 et le débit.

SOLUTION DE L'EXEMPLE 1

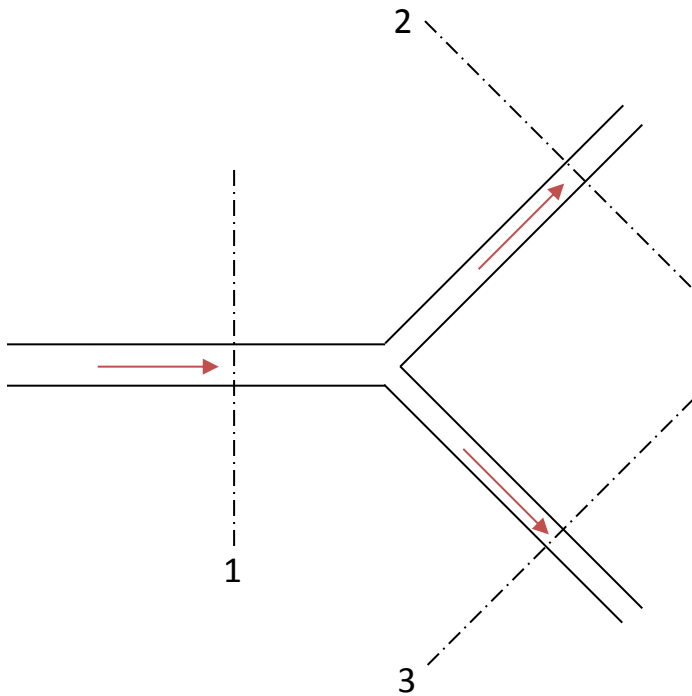
Appliquons l'équation de la continuité entre les sections 1 et 2 :

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1 A_1}{A_2} = \frac{1,2 \times 0,1}{0,05} = 2,4 \text{ m/s}$$

Le débit est donné par : $Q = VA = 2,4 \times 0,05 = 0,120 \text{ m}^3 / \text{s}$



EXEMPLE DE CALCUL 2



Cas d'une bifurcation de courant où la section 1 a un diamètre de 400 mm, la section 2 a un diamètre de 200 mm et le diamètre de la section 3 est de 160 mm. Si la vitesse à la section 1 est de 1,60 m/s et celle à la section 2 est de 3,9 m/s, calculer les débits Q_1 , Q_2 et Q_3 ainsi que la vitesse à la section 3.

SOLUTION DE L'EXEMPLE 2

Les débits sont donnés par l'équation de la continuité :

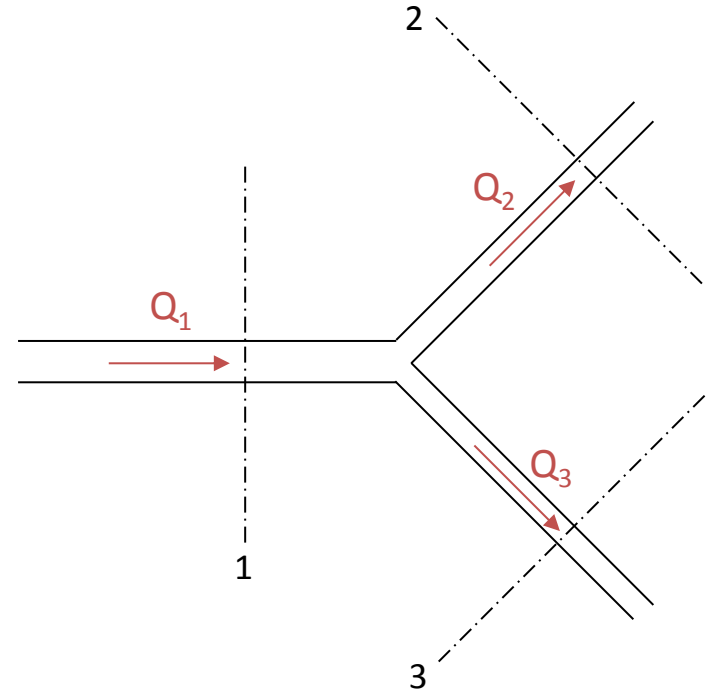
$$Q_1 = V_1 A_1 = 1,6 \times \frac{\pi \times 0,4^2}{4} = 0,201 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_2 = V_2 A_2 = 3,9 \times \frac{\pi \times 0,2^2}{4} = 0,122 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0,201 - 0,122 = 0,079 \text{ m}^3 / \text{s}$$

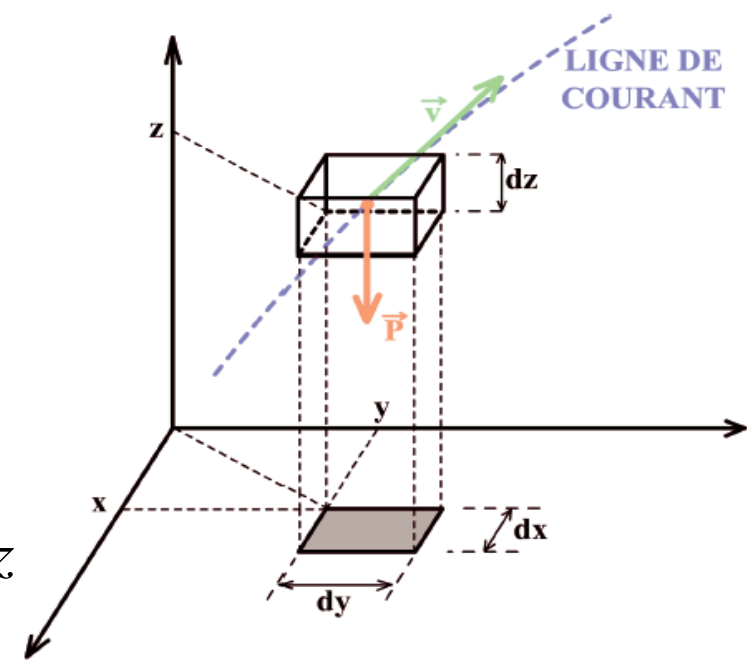
La vitesse à la section 3 est :

$$V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{4 \times 0,079}{\pi \times 0,16^2} = 3,93 \text{ m/s}$$



III- EQUATION D'EULER

Soient une particule de fluide de volume $dV=dx*dy*dz$ située en un point de coordonnées x , y et z , dans un champ de gravitation terrestre \vec{g} :



$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = 0 ; \frac{\partial p}{\partial y} dy = 0 ; \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho g dz$$

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à la particule dV : $\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}_G$

Selon l'axe Ox

$$- p(x + dx, y, z) dy dz + p(x, y, z) dy dz = \rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow - p(x + dx, y, z) + p(x, y, z) = \rho dx \frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{p(x + dx, y, z) - p(x, y, z)}{dx} = \rho \frac{dv_x}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{dv_x}{dt}$$

Selon l'axe Oy

$$- p(x, y + dy, z) dx dz + p(x, y, z) dx dz = \rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow - p(x, y + dy, z) + p(x, y, z) = \rho dy \frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{p(x, y + dy, z) - p(x, y, z)}{dy} = \rho \frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{dv_y}{dt}$$

Selon l'axe Oz

$$- \rho dx dy dz g - p(x, y, z + dz) dx dy + p(x, y, z) dx dy = \rho dx dy dz \frac{dv_z}{dt}$$

$$\Rightarrow - \rho dz g - p(x, y, z + dz) + p(x, y, z) = \rho dz \frac{dv_z}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{\rho dz g + p(x, y, z + dz) - p(x, y, z)}{dz} = \rho \frac{dv_z}{dt}$$

$$\Rightarrow - \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{dv_z}{dt}$$

La différentielle totale de p est :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

remplaçons $\frac{\partial p}{\partial x}$; $\frac{\partial p}{\partial y}$; $\frac{\partial p}{\partial z}$ par leurs valeurs

$$dp = \left(-\rho \frac{dv_x}{dt} \right) dx + \left(-\rho \frac{dv_y}{dt} \right) dy + \left(-\rho g - \rho \frac{dv_z}{dt} \right) dz$$

$$\text{ou : } dp = -\rho dv_x \frac{dx}{dt} - \rho dv_y \frac{dy}{dt} - \rho g dz - \rho dv_z \frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow dp = -\rho v_x dv_x - \rho v_y dv_y - \rho v_z dv_z - \rho g dz$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow v_x \\ v \\ \rightarrow v_y \\ v \\ \rightarrow v_z \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow dv_x \\ dv \\ \rightarrow dv_y \\ dv \\ \rightarrow dv_z \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \\ \vec{v} \vec{dv} = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z \end{array}$$

alors : $dp = -\rho v dv - \rho g dz$

Ou:

$$dp + \rho v dv + \rho g dz = 0$$

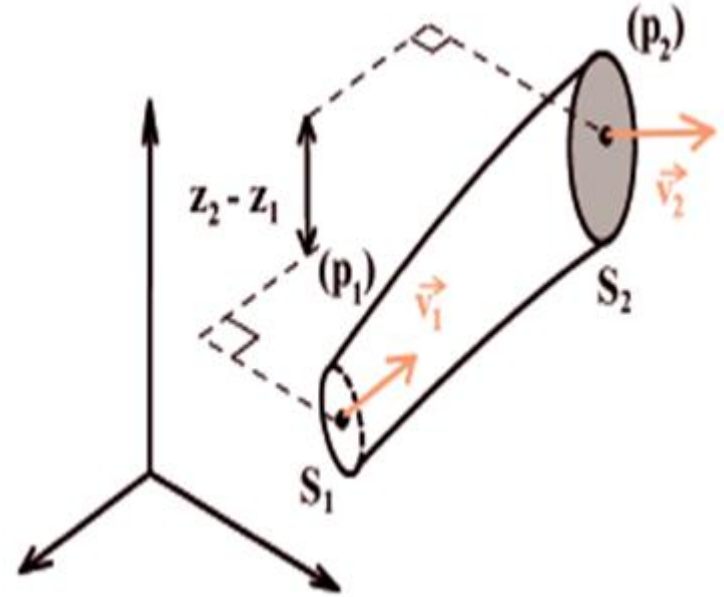
Equation d'EULER

IV- THÉORÈME DE BERNOULLI EN ECOULEMENT PARFAIT

Intégrons l'équation d'EULER entre 2 points de la veine liquide:

$$\int_1^2 (dp + \rho v dv + \rho g dz) = 0$$

$$\text{soit : } [p]_{p_1}^{p_2} + \frac{\rho}{2} [v^2]_{v_1}^{v_2} + \rho g [z]_{z_1}^{z_2} = 0$$



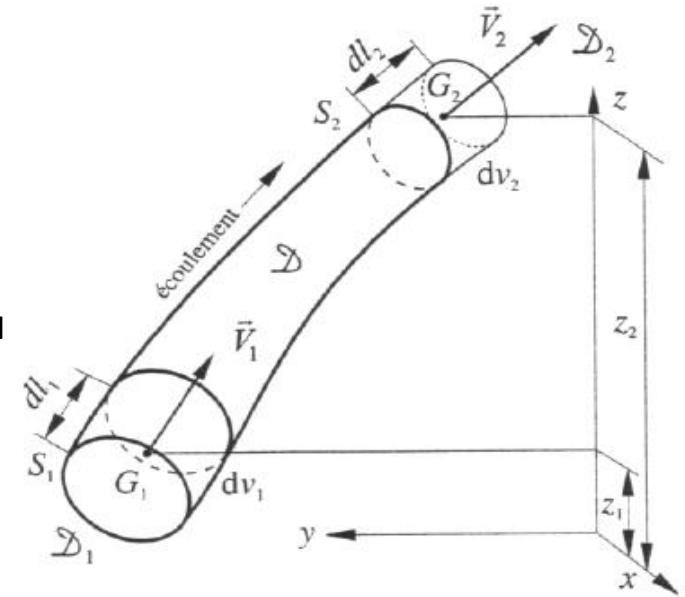
$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2$$

Théorème de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible

L'équation de Bernoulli exprime que , tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent , l'énergie totale par unité de poids du liquide reste constante .

2 ème méthode de démonstration du Théorème de Bernoulli pour un fluide parfait

- $\rho = \text{Cte}$: masse volumique du fluide incompressible
- l'indice $i = 1$ correspond aux paramètres à l'entrée
- l'indice $i = 2$ correspond aux paramètres à la sortie
- dvi : volume de fluide déplacé entre les instants t et $t + dt$ de masse dmi ,
- S_i : section de la veine fluide,
- dli : hauteur du volume cylindrique de fluide admis ou expulsé ($dvi = S_i dli$),
- V_i : vitesse des particules fluides,
- G_i : centres de gravité des volumes dvi d'altitude z_i ,
- p_i : pression



➤ Expressions des différentes formes d'énergie mécanique

↪ A l'entrée

- Énergie cinétique:

$$W_{c1} = \frac{1}{2} dm_1 V_1^2 = \frac{1}{2} \rho S_1 dl_1 V_1^2$$

- Énergie potentielle de pesanteur:

$$W_{z1} = dm_1 g z_1 = \rho S_1 dl_1 g z_1$$

- Énergie potentielle de pression:

$$W_{p1} = p_1 S_1 dl_1$$

↪ A la sortie

- Énergie cinétique:

$$W_{c2} = \frac{1}{2} dm_2 V_2^2 = \frac{1}{2} \rho S_2 dl_2 V_2^2$$

- Énergie potentielle de pesanteur:

$$W_{z2} = dm_2 g z_2 = \rho S_2 dl_2 g z_2$$

- Énergie potentielle de pression:

$$W_{p2} = p_2 S_2 dl_2$$

➤ Expression du principe de conservation de l'énergie

$$W_{c1} + W_{z1} + W_{p1} = W_{c2} + W_{z2} + W_{p2}$$
$$\rho S_1 dl_1 \left[\frac{V_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right] = \rho S_2 dl_2 \left[\frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right]$$

D'après l'équation de continuité: $\rho S_1 \frac{dl_1}{dt} = \rho S_2 \frac{dl_2}{dt} = Q_m$

On obtient alors : $\rho S_1 dl_1 = \rho S_2 dl_2 = dm$

□ Bilan d'énergie:

Le théorème de Bernoulli relie les paramètres de l'écoulement permanent d'un fluide incompressible le long d'une veine fluide avec laquelle il n'a aucun échange d'énergie:

$$\left[\frac{V_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} \right] = \left[\frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho} \right] \quad (\text{unité: Joules/Kg})$$

Autre forme:

$$\frac{1}{2} [V_2^2 - V_1^2] + g (z_2 - z_1) + \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) = 0$$

Le premier terme de cette dernière relation exprime, pour un kilogramme de fluide, la variation d'énergie mécanique totale du fluide entre S_1 et S_2 : *elle est nulle*

□ **Bilan des pressions:**

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g z_2 \quad (Pa)$$

Pression statique: $p + \rho g z = p^*$

Pression dynamique: $\frac{\rho v^2}{2}$

□ **Bilan des hauteurs:**

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 \quad (m)$$

$$H = \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z = Cste$$

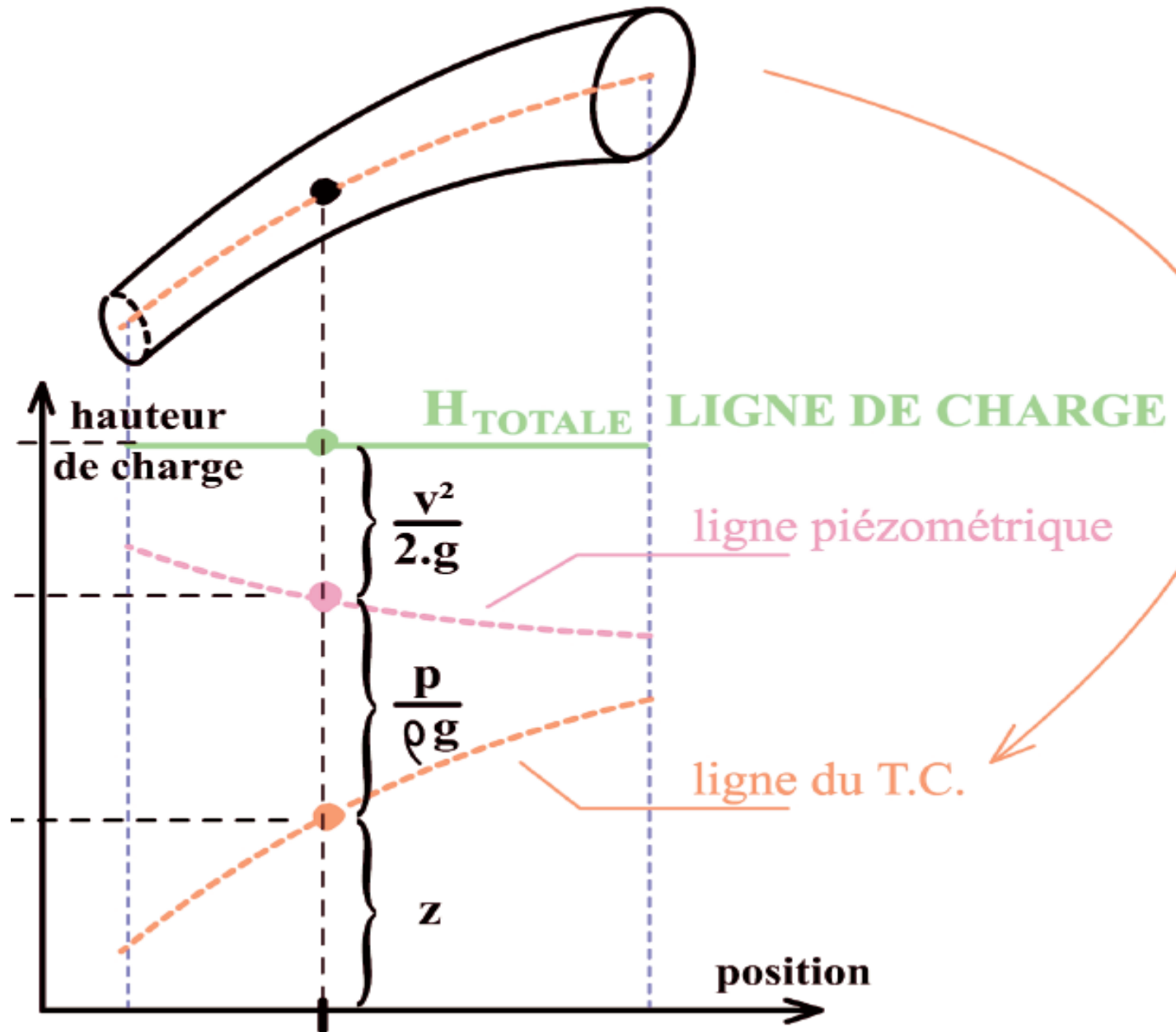
Hauteur manométrique: $\frac{p}{\rho g}$

Hauteur piézométrique: $\frac{p}{\rho g} + z$

Hauteur dynamique: $\frac{v_1^2}{2g}$

Charge totale: H

Représentation graphique de l'équation de BERNOULLI

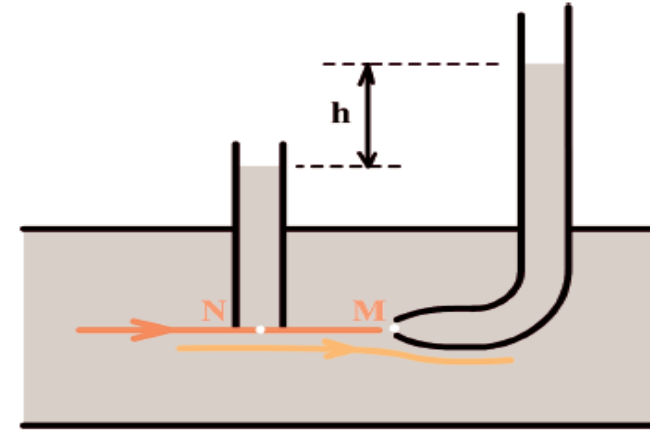


- Applications du théorème de Bernoulli:

- Tube de Pitot:

On dispose 2 tubes de prises de pression dans la canalisation de l'écoulement. Une prise de pression donne accès à la pression statique (point N) et une prise de pression qui permet l'obtention de la pression d'arrêt (point M). Déterminons la vitesse d'écoulement.

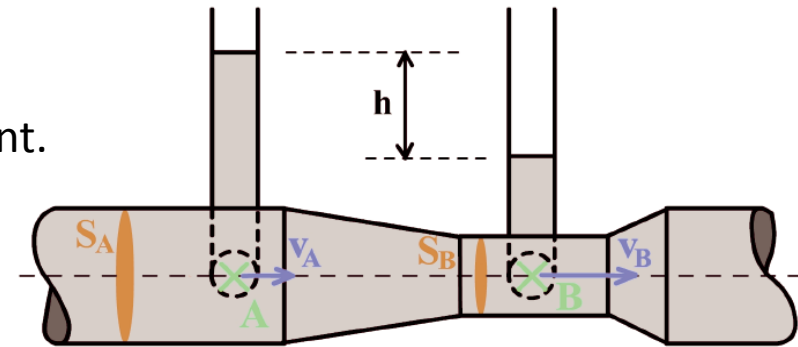
$$\left. \begin{aligned} P_M - P_N &= \frac{1}{2} \rho v^2 \\ P_M &= P_N + \rho gh \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$



- Tube Venturi:

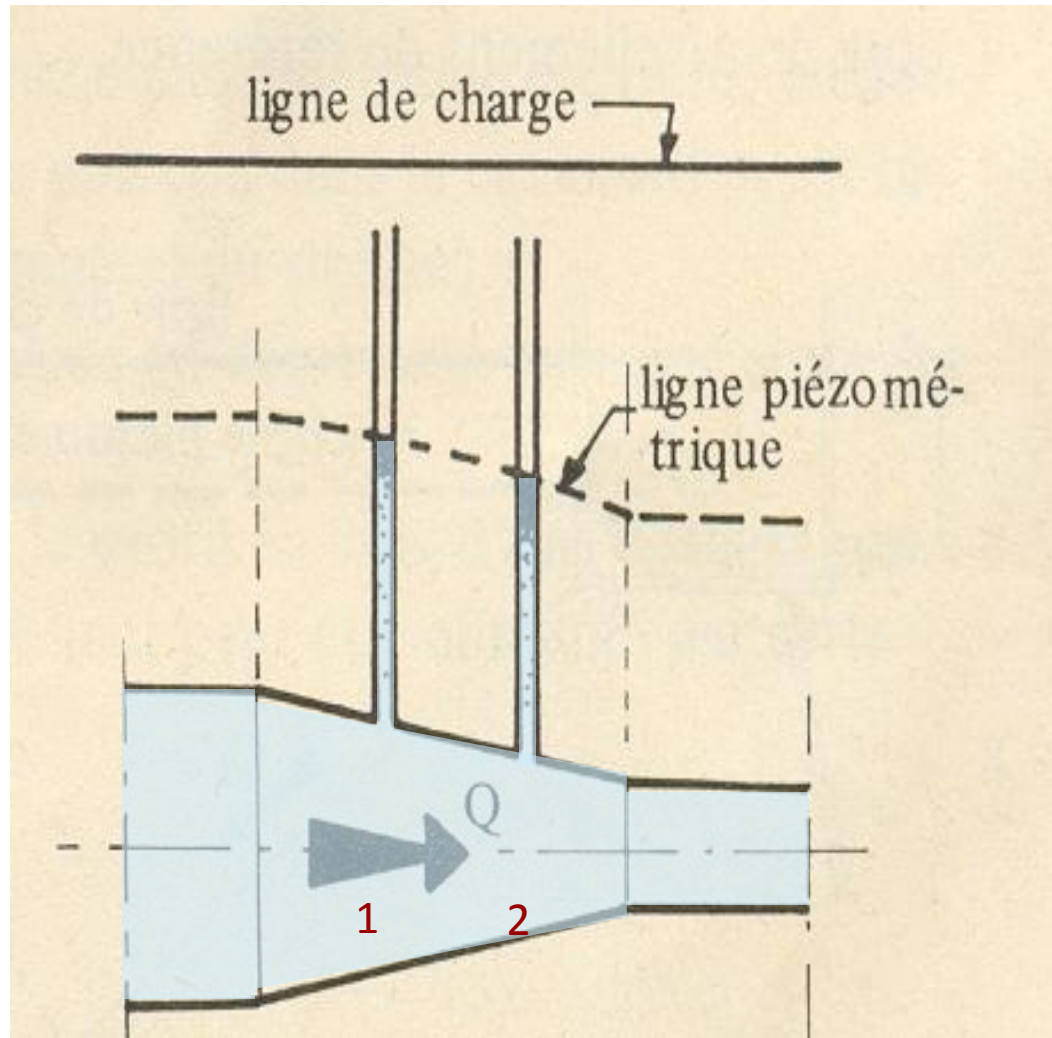
On dispose 2 tubes de prises de pression statique dans la canalisation de l'écoulement. Déterminons la débit d'écoulement.

$$\left\{ \begin{aligned} P_A - P_B &= \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) \\ P_A - P_B &= \rho gh \\ Q_V &= v_A S_A = v_B S_B \end{aligned} \right.$$



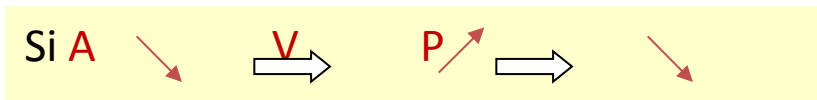
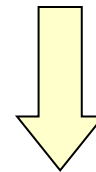
$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho Q_V^2 \left[\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right] \Rightarrow Q_V = \left[\frac{S_A^2 - S_B^2}{S_A^2 S_B^2} \right] \sqrt{2gh}$$

- Variation de pression dans un tronçon à section variable:



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = cte$$



V- THÉORÈME DE BERNOULLI EN ECOULEMENT REEL

Contrairement au fluide parfait non visqueux , la charge H pour un fluide réel visqueux ne se conserve plus entre 2 points:

$$\Rightarrow H_1 \neq H_2 \quad \text{et} \quad H_1 > H_2 \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 > \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Ceci est du à la nature visqueuse du fluide qui dissipe une partie de l'énergie: cette perte d'énergie est appelée "**Perte de charge**".

La représentation graphique en cas de fluide réel est donc montré par le schéma suivant :

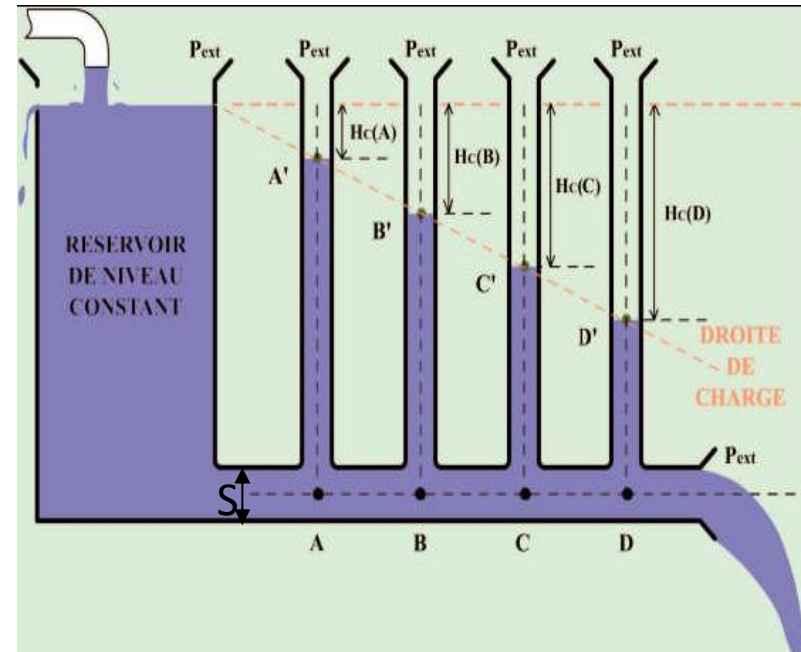
Viscosité

➤ mise en évidence

- $AA' > BB' > CC' > DD'$

- l'équation de Bernoulli stipule que :
$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = Cste$$

Comme z (plan horizontal) et v (même débit et section de la conduite) sont les mêmes sur les différents points (A, B, C etc.), les pressions doivent être également identiques sur ces points; or à cause des chutes des hauteurs d'eau dans les piézomètres les pressions chutent aussi et donc l'équation de Bernoulli est transgressée.



➤ Forces de viscosité

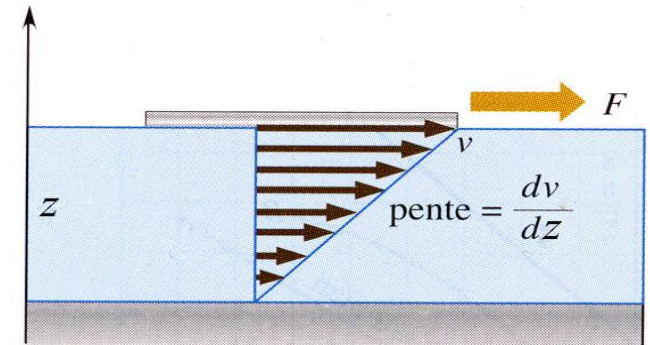
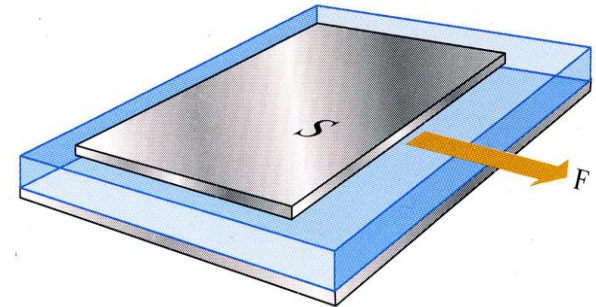
Soit une couche de fluide entre 2 plaques : une fixe et l'autre mobile (vitesse v)

- **énoncé de la loi de Newton :**

la contrainte tangentielle visqueuse est proportionnelle au gradient de vitesse :

$$\frac{dF}{dS} = \mu \frac{dv}{dz} \quad \mu : \text{viscosité dynamique (Pa.s)}$$

- la viscosité est une propriété qui traduit la résistance d'un fluide à l'écoulement
- elle se manifeste lors de l'écoulement d'un fluide dans une canalisation ou lors d'un mouvement d'un solide par rapport à un fluide

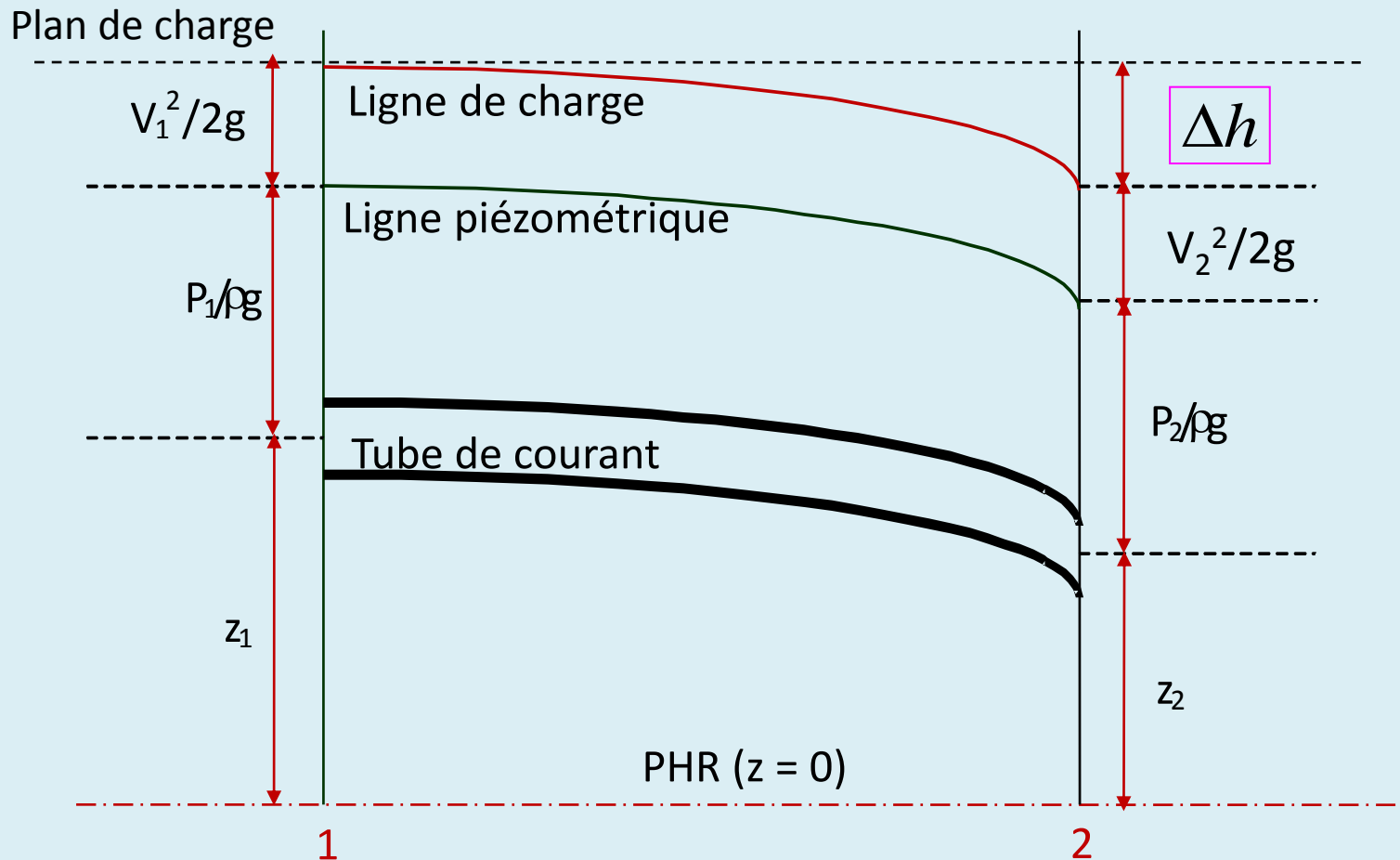


⇒ la relation de Bernoulli entre 1 point et un autre doit être ajustée de la manière suivante:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

Δh : *pertes d'énergie ou de charge*

REPRESENTATION GRAPHIQUE DU THEOREME DE BERNOULLI EN ECOULEMENT REEL



EXEMPLE DE CALCUL

De l'eau circule d'un réservoir à travers une conduite φ 250 mm. On suppose que les pertes de charge sont comme suit:

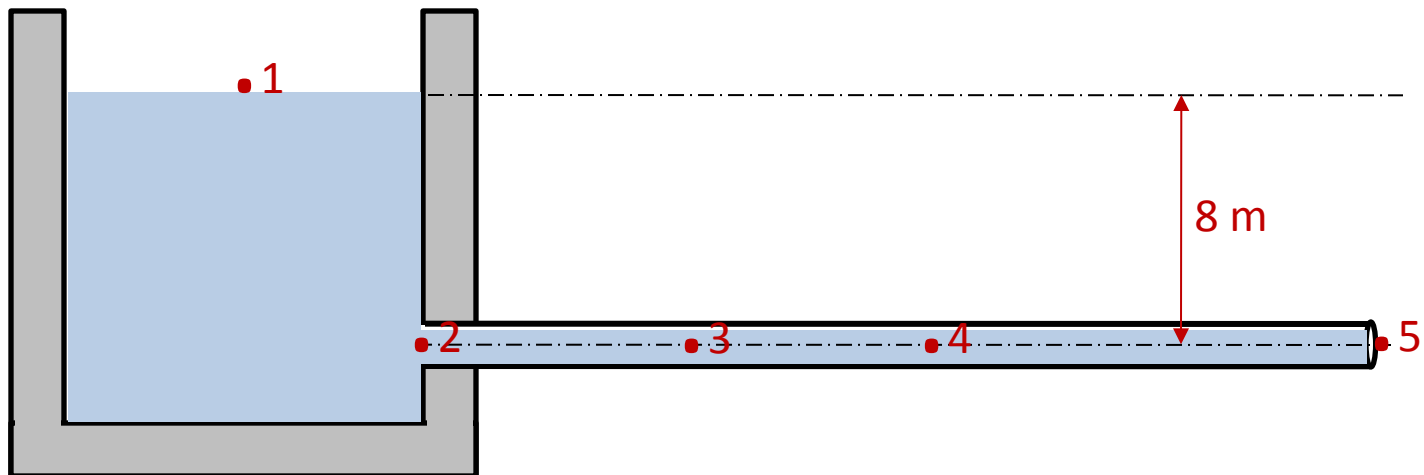
- De 2 à 3 : $\Delta h_2^3 = 1,45 \text{ m}$

- De 3 à 4 : $\Delta h_3^4 = 1,65 \text{ m}$

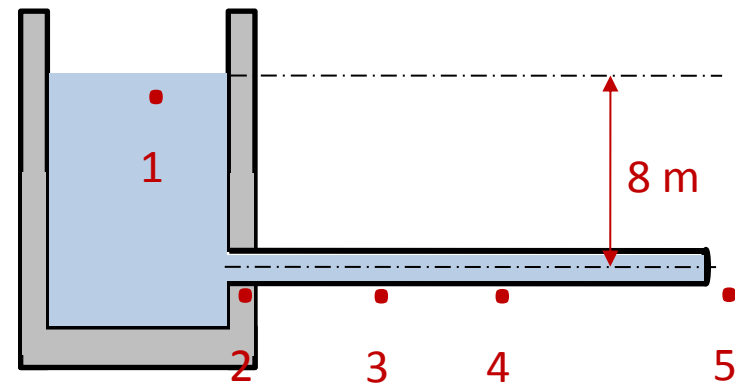
- De 4 à 5 : $\Delta h_4^5 = 1,90 \text{ m}$

1. Déterminer le débit de la conduite et les pressions aux points 3 et 4.
2. Tracer la ligne piézométrique et la ligne de charge.

N.B: La perte de charge entre 1 et 2 est supposée négligeable.



SOLUTION



1 - Débit de l'installation :

$$Q = V \times A = V \times \frac{\pi D^2}{4}$$

Pour déterminer V, il faut appliquer le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir et l'extrémité de la conduite :

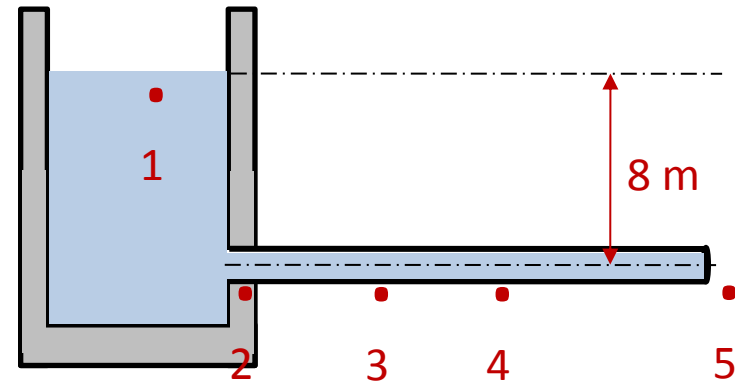
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_5}{\rho g} + \frac{V_5^2}{2g} + Z_5 + \Delta h_{1-5}$$

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_5}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g} = 0 \text{ (Origine des pressions)} \text{ et } \frac{V_1^2}{2g} \approx 0 \text{ (Réservoir de grandes dimensions)}$$

$$\text{donc : } Z_1 = Z_5 + \frac{V_5^2}{2g} + \Delta H_{1-5} \Rightarrow \frac{V_5^2}{2g} = Z_1 - Z_5 - \Delta H_{1-5}$$

$$\Rightarrow V_5 = \sqrt{2g(Z_1 - Z_5 - \Delta H_{1-5})} = \sqrt{2 \times 9,81 \times (8 - (1,45 + 1,65 + 1,9))} = 7,67 \text{ m/s}$$

$$\text{Le débit est calculé par : } Q = 7,67 \times \frac{3,14 \times 0,25^2}{4} = 0,377 \text{ m}^3 / \text{s}$$



2-Calcul des pressions aux points 3 et 4 :

Le théorème de Bernoulli appliqué entre les points 1 et 3 donne :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 + \Delta H_{1-3} \Rightarrow Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 + \Delta H_{1-3}$$

$$\Rightarrow \frac{P_3}{\rho g} = Z_1 - Z_3 - \frac{V_3^2}{2g} - \Delta H_{1-3} = 8 - \frac{7,67^2}{2 \times 9,81} - 1,45 = 3,55 \text{ m}$$

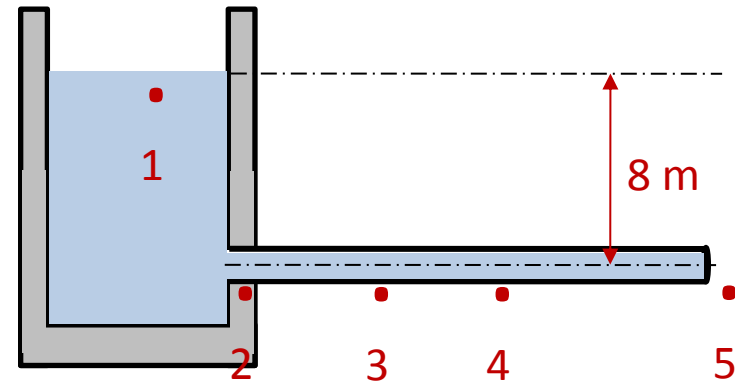
De façon analogue, le théorème de Bernoulli appliqué entre les points 3 et 4 donne :

$$\frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 = \frac{P_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + Z_4 + \Delta H_{3-4}$$

$$Z_3 = Z_4 \quad \text{et} \quad V_3 = V_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_3}{\rho g} = \frac{P_4}{\rho g} + \Delta H_{3-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_4}{\rho g} = \frac{P_3}{\rho g} - \Delta H_{3-4}$$

$$\Rightarrow \frac{P_4}{\rho g} = 3,55 - 1,65 = 1,90 \text{ m}$$

SOLUTION



3 – Tracé de la ligne piézométrique et la ligne de charge :

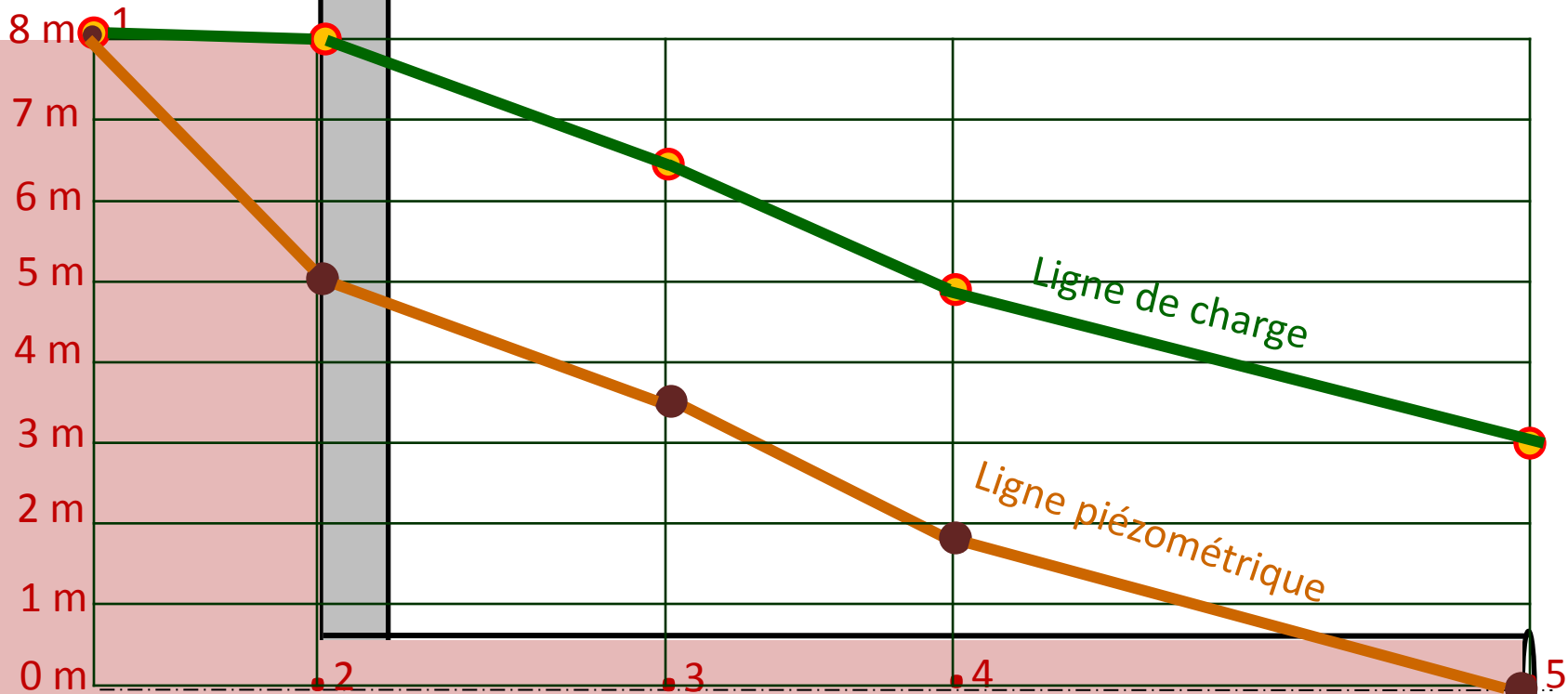
Pour effectuer le tracé de H et $\left(\frac{P}{\rho g} + Z\right)$, il faut déterminer la pression au point 2.

⇒ Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \Delta H_1^2 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2$$

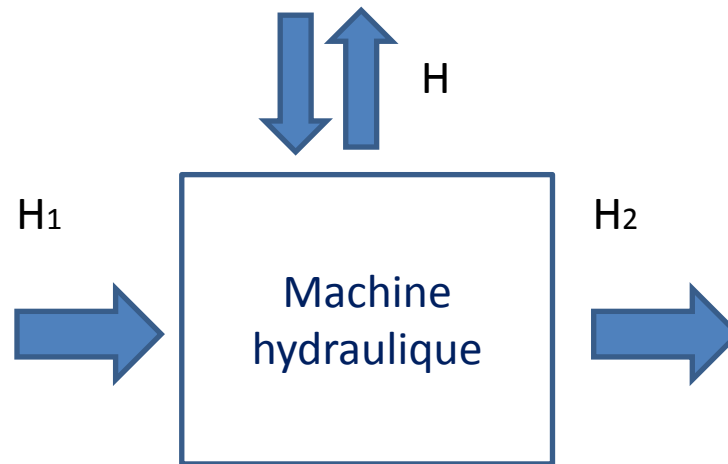
$$\Rightarrow \frac{P_2}{\rho g} = Z_1 - Z_2 - \frac{V_2^2}{2g} = 8 - \frac{7,67^2}{2 \times 9,81} = 5 \text{ m}$$

Point	Charge (m)	Charge piézométrique (m)
1	$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = 0 + 0 + 8 = 8$	$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = 0 + 8 = 8$
2	$H_1 - \Delta H_{1-2} = 8 - 0 = 8$	$\frac{P_2}{\rho g} + Z_2 = 5 + 0 = 5$
3	$H_2 - \Delta H_{2-3} = 8 - 1,45 = 6,55$	$\frac{P_3}{\rho g} + Z_3 = 3,55 + 0 = 3,55$
4	$H_3 - \Delta H_{3-4} = 6,55 - 1,65 = 4,9$	$\frac{P_4}{\rho g} + Z_4 = 1,90 + 0 = 1,90$
5	$H_4 - \Delta H_{4-5} = 4,9 - 1,90 = 3$	$\frac{P_5}{\rho g} + Z_5 = 0 + 0 = 0$



VI- THÉORÈME DE BERNOULLI AVEC TRANSFERT D'ÉNERGIE

Il est assez fréquent, dans les réalisations industrielles, qu'un appareil hydromécanique, placé dans une veine fluide, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine).

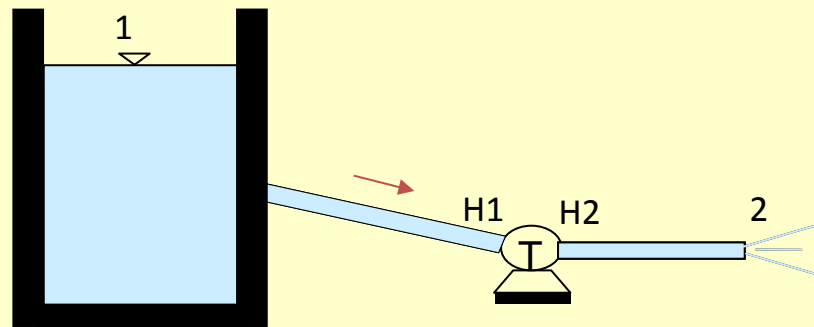


- ✓ Si de l'énergie H_t est **fournie par l'écoulement** à un dispositif mécanique, l'équation de Bernoulli devient :

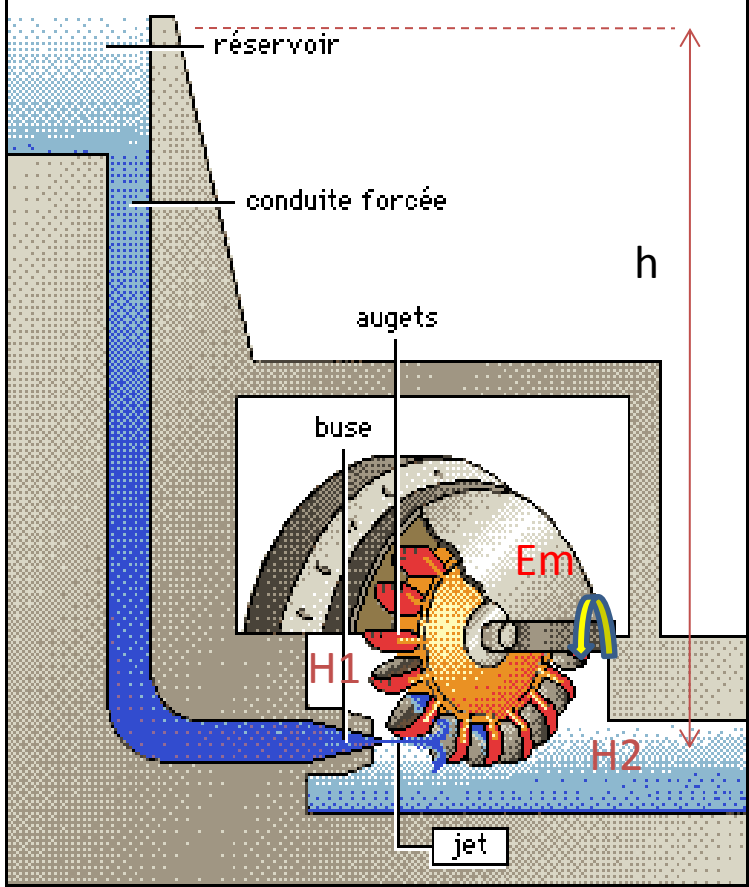
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_t = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

Machines réceptrices (turbine, Noria

$$H_2 < H_1$$

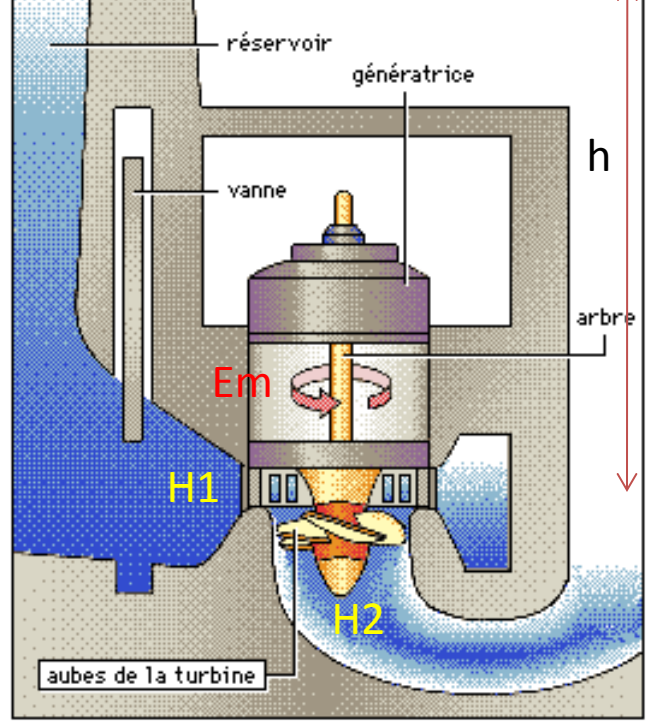


**Turbine Pelton
(turbine à action)**



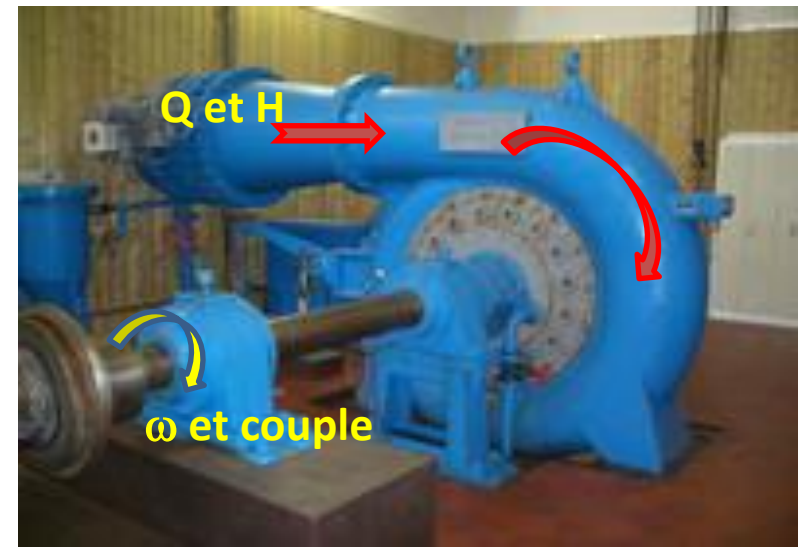
Exemple

**Turbine Kaplan
(turbopropulseur)**



$H2 < H1$

Turbines hydrauliques

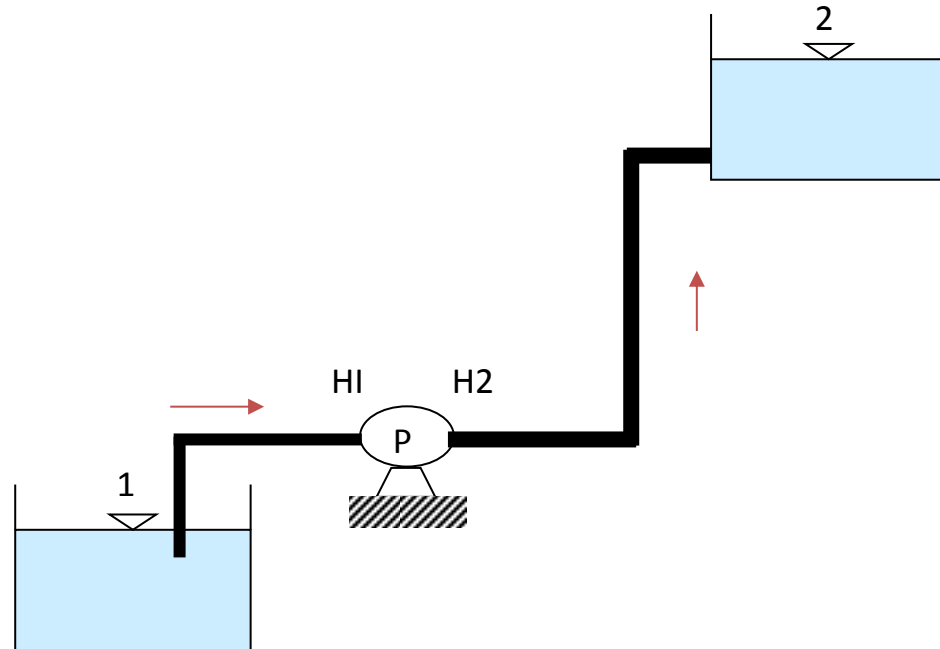


- ✓ Si de l'énergie H_p est fournie à l'écoulement par le moyen d'une pompe, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

Machines élévatrices (pompes volumétriques, turbopompes)

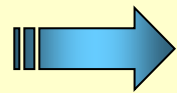
$$H_2 > H_1$$



VII- PUISSANCES DES ECOULEMENTS

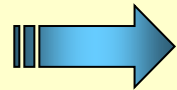
- ✓ Si un écoulement d'un fluide se fait à un débit Q (m^3/s), avec un poids spécifique ρg (N/m^3) et une énergie totale

H (m) \Rightarrow Puissance de l'écoulement (**W**)



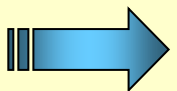
$$P = \rho g Q H$$

- ✓ Si une machine fournit de l'énergie au fluide H_p
 \Rightarrow Puissance hydraulique de la machine (**W**)



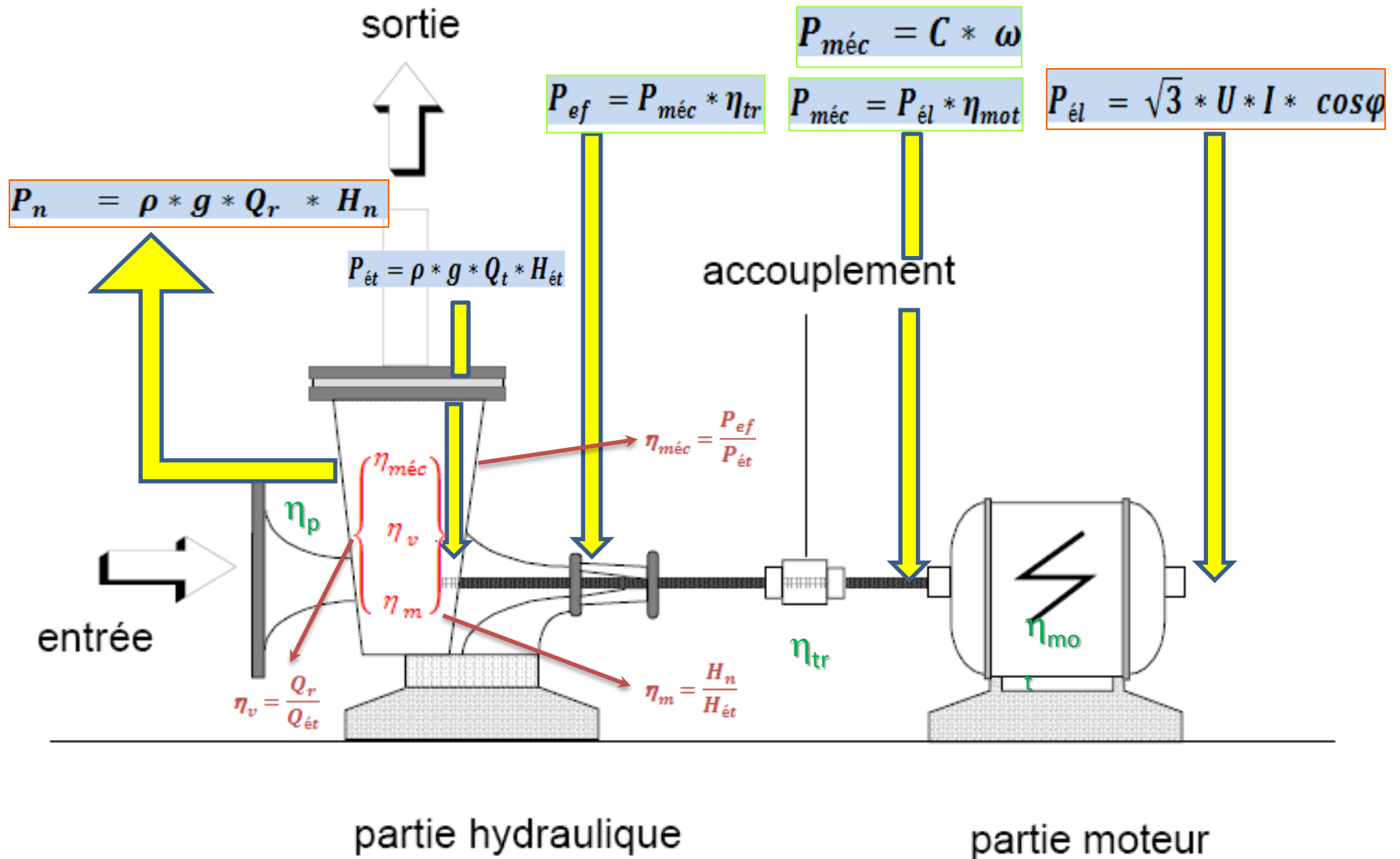
$$P = \rho g Q H_p$$

- ✓ Si une machine consomme de l'énergie du fluide H_t
 \Rightarrow Puissance hydraulique de la machine (**W**)



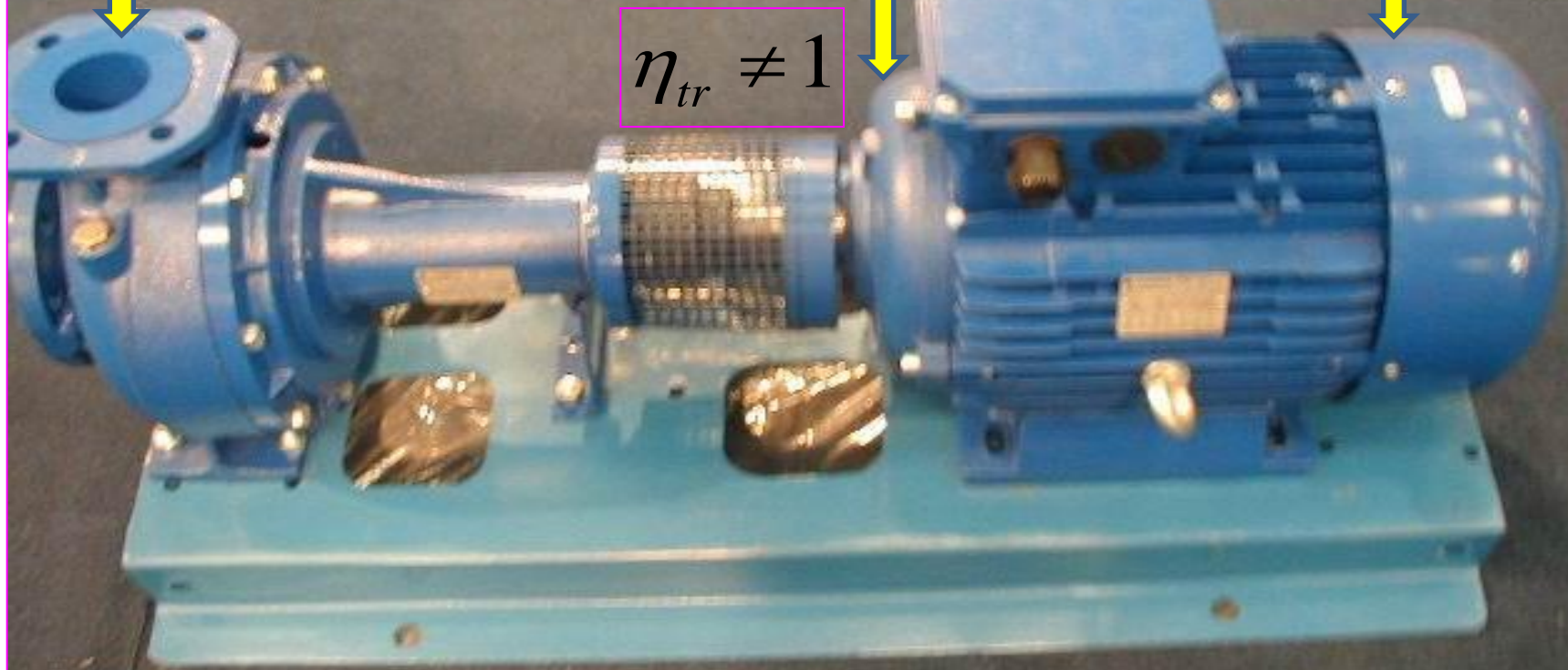
$$P = \rho g Q H_t$$

$$\eta_{gr} = \frac{P_n}{P_{él}}$$



Bilan d'énergie d'un groupe de pompage

$$P_n = \rho * g * Q_r * H_n$$



$$\eta_{tr} \neq 1$$

$$P_{méc} = C * \omega$$

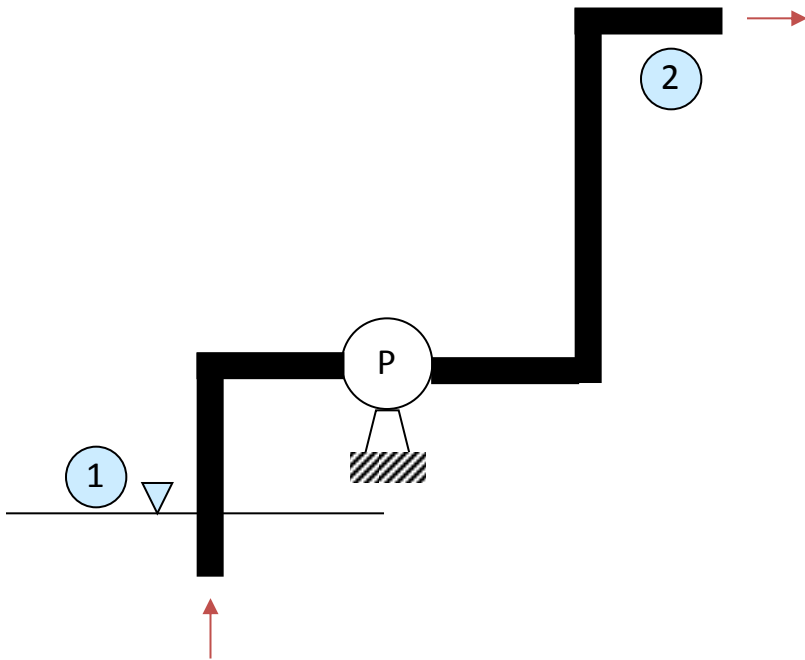
$$P_{méc} = P_{él} * \eta_{mot}$$



$$P_{él} = \sqrt{3} * U * I * \cos\varphi$$



EXEMPLE DE CALCUL



Circuit de pompage débitant $0,024 \text{ m}^3/\text{s}$ d'eau. La conduite a un diamètre de 160 mm et débouche à l'air libre, à 6 m au-dessus du plan d'eau. Dans le cas d'un liquide parfait, calculer la hauteur de charge et la puissance hydraulique fournies par la pompe.

SOLUTION

La puissance utile de la pompe s'exprime par la relation : $P = \rho g Q H_p$

Pour calculer H_p , appliquons le théorème de Bernoulli entre 1 et 2 en tenant compte de l'apport de charge de la pompe :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Les points 1 et 2 sont soumis à la pression atmosphérique, d'où : $\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} = 0$

Le point 1 est situé sur une surface libre (réservoir de grandes dimensions) $\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = 0$

D'où : $H_p = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 - z_1$

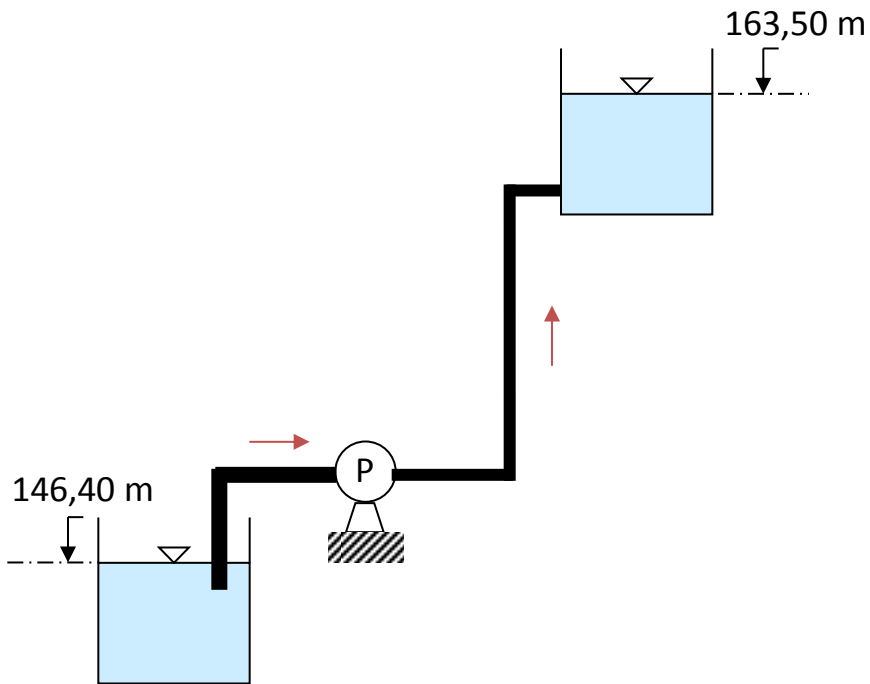
Calculons la vitesse V_2 :

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4 \times 0,024}{\pi \times 0,16^2} = 1,19 \text{ m/s}$$

$$\text{Par conséquent : } H_p = \frac{1,19^2}{2 \times 9,81} + 6 = 6,07 \text{ m}$$

Enfin, $P = 1000 \times 9,81 \times 0,024 \times 6,07 = 1429 \text{ W} = 1,43 \text{ Kw}$

EXEMPLE DE CALCUL



La pompe indiquée dans la figure refoule un débit de 65 l/s d'eau dans un réservoir à la cote de 163,50 m. Les pertes de charge dans la conduite d'aspiration $\Phi 200$ de la pompe et la conduite de refoulement $\Phi 150$ sont respectivement 3 et 6 fois leurs énergies cinétiques respectives. Déterminer la puissance utile de la pompe.

SOLUTION

La puissance utile de la pompe s'exprime par la relation : $P = \rho g Q H_p$

Pour calculer H_p , appliquons le théorème de Bernoulli entre les 2 surfaces libres des 2 réservoirs en tenant compte de l'apport de charge de la pompe :

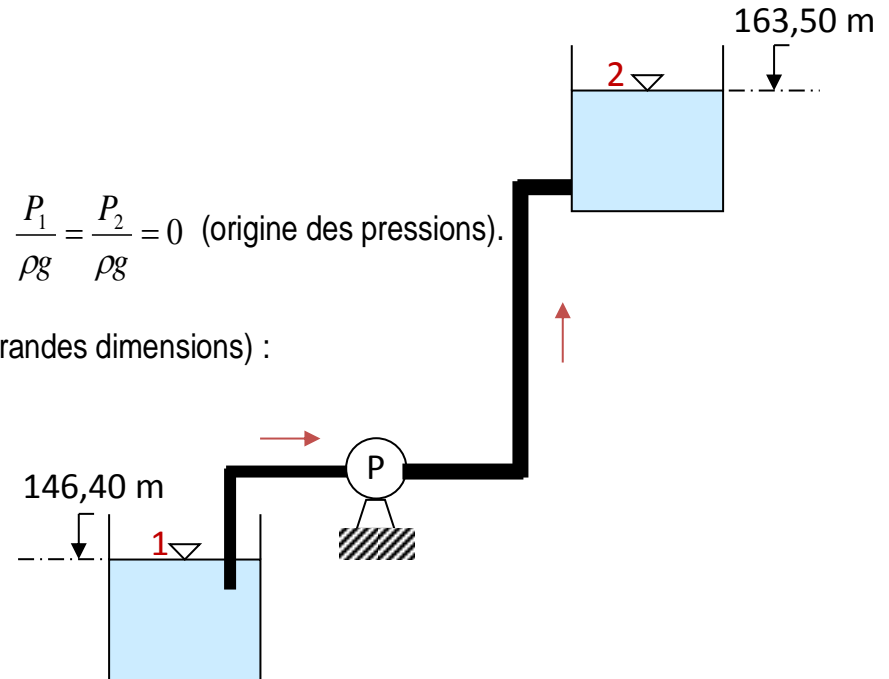
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

Les points 1 et 2 sont soumis à la pression atmosphérique, d'où : $\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} = 0$ (origine des pressions).

Les points 1 et 2 sont situés sur des surfaces libres (réservoirs de grandes dimensions) :

$$\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} = 0$$

D'où :
$$H_p = \Delta h + (z_2 - z_1)$$



Calculons la perte de charge totale entre 1 et 2 :

$$\Delta H_1^2 = \Delta H_a + \Delta H_r = 3 \frac{V_a^2}{2g} + 6 \frac{V_r^2}{2g}$$

$$V_a = \frac{Q}{A_a} = \frac{4 \times 0,065}{\pi \times 0,2^2} = 2,07 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad V_r = \frac{Q}{A_r} = \frac{4 \times 0,065}{\pi \times 0,15^2} = 3,68 \text{ m/s}$$

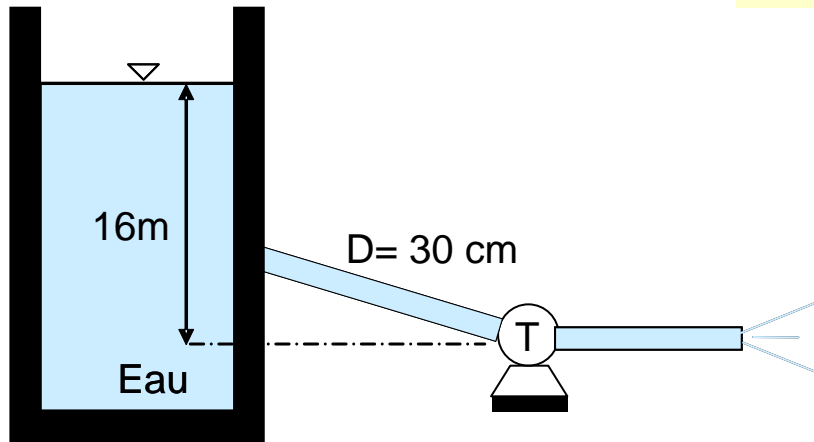
$$\text{D'où :} \quad \Delta h = 3 \times \frac{2,07^2}{2 \times 9,81} + 6 \times \frac{3,68^2}{2 \times 9,81} = 4,8 \text{ m}$$

$$\text{Ainsi :} \quad H_p = 4,8 + 163,5 - 146,4 = 21,9 \text{ m}$$

$$\text{Ar conséquent,} \quad P = 1000 \times 9,81 \times 0,065 \times 21,9 = 13.965 \text{ W} = 14 \text{ Kw}$$

EXEMPLE

Un débit de 460 l/s d'eau entraîne la turbine représentée ci-dessous. Quelle est la puissance fournie par l'écoulement à la turbine?



SOLUTION

La puissance utile fournie à la turbine s'exprime par : $P = \rho g Q H_t$

Pour déterminer H_p , appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre du réservoir (1) et la sortie de la conduite (2) :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - H_t = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Les points 1 et 2 sont soumis à la pression atmosphérique, d'où : $\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} = 0$

Le point 1 est situé sur une surface libre (réservoir de grandes dimensions) : $\Rightarrow \frac{V_1^2}{2g} = 0$

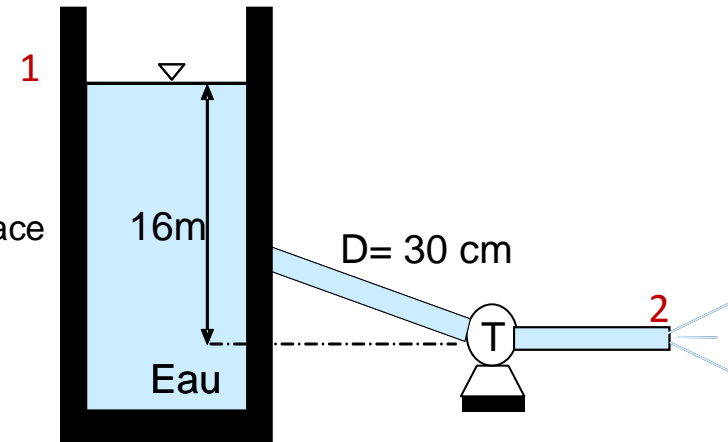
D'où :

$$H_t = z_1 - z_2 - \frac{V_2^2}{2g}$$

Calculons la vitesse V_2 : $V_2 = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0,46}{\pi \times 0,3^2} = 6,51 \text{ m/s}$

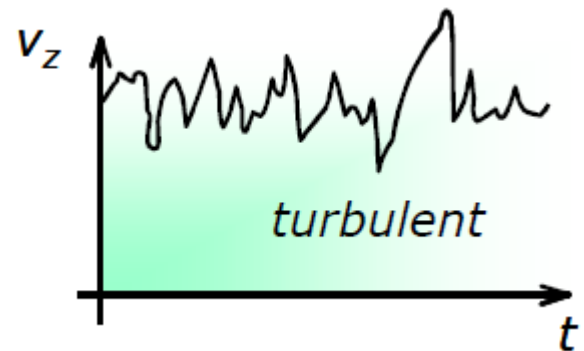
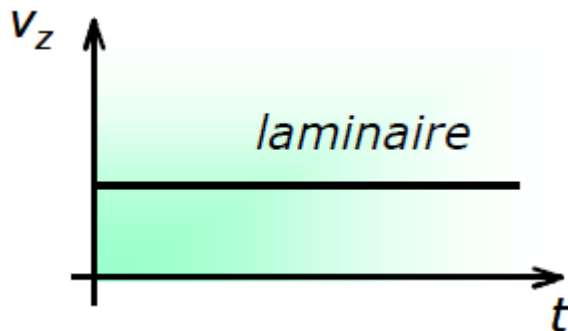
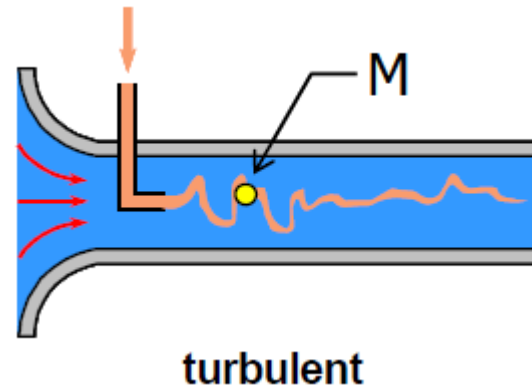
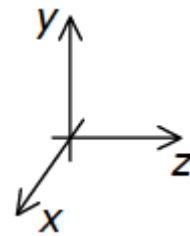
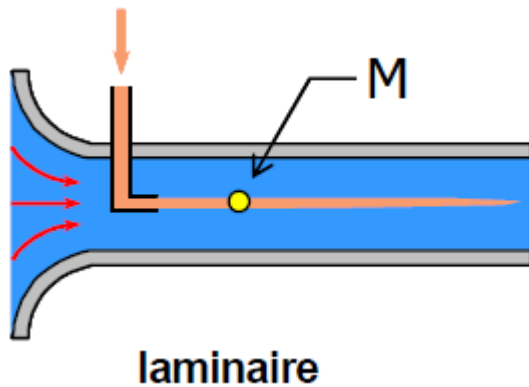
$$\Rightarrow H_t = 16 - \frac{6,51^2}{2 \times 9,81} = 13,84 \text{ m}$$

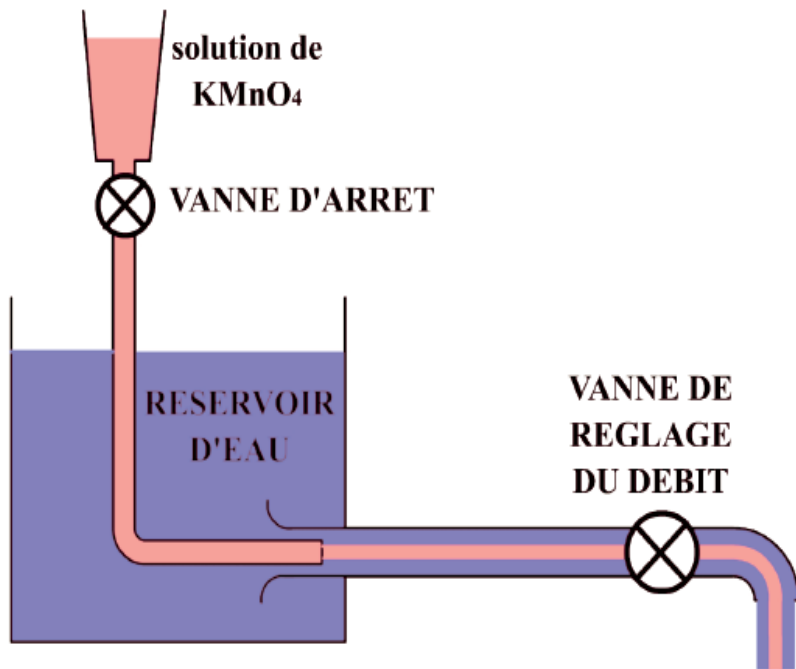
Enfin, $P = 1000 \times 9,81 \times 0,46 \times 13,84 = 62.451 \text{ W} = 62,5 \text{ Kw}$



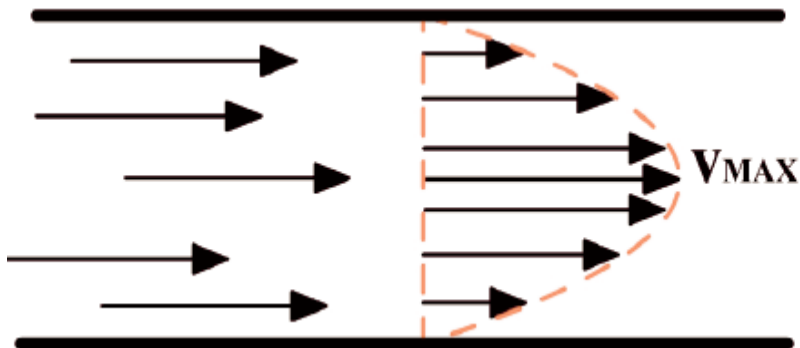
VIII- REGIMES D'ÉCOULEMENT

Les expériences réalisées par **Reynolds en 1883** lors de l'écoulement d'un **liquide** dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : *régime laminaire* et *régime turbulent* :

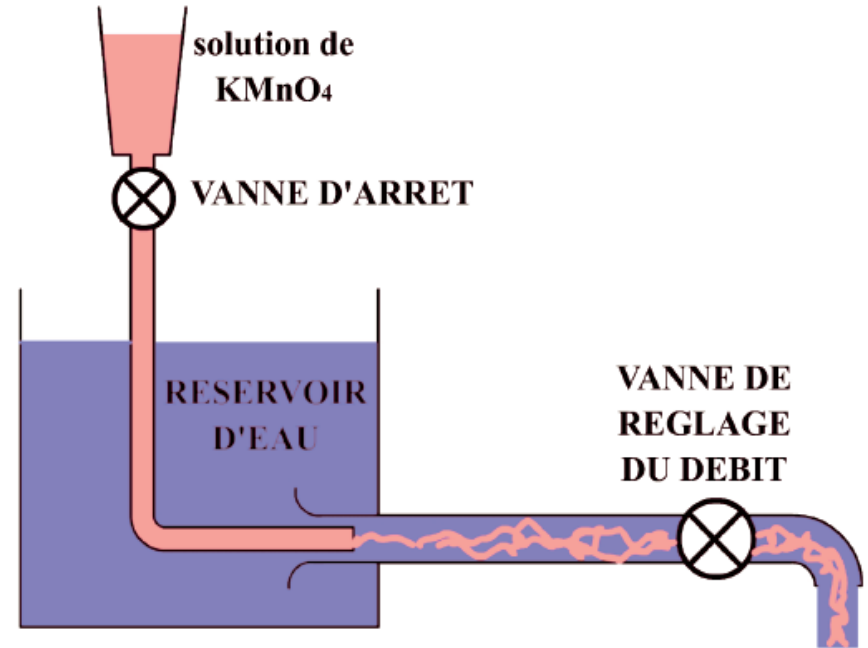




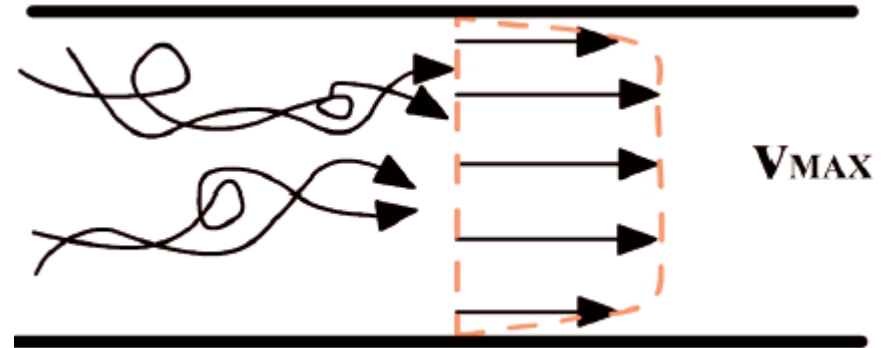
REGIME LAMINAIRE



DANS UN REGIME LAMINAIRE, LES FORCES DE FROTTEMENT VISQUEUX DOMINENT, ET IMPOSENT CE REGIME



REGIME TURBULENT



DANS UN REGIME TURBULENT, LES TRANSFERTS DE QUANTITE DE MOUVEMENT PAR CONVECTION DOMINENT, ET IMPOSENT CE REGIME

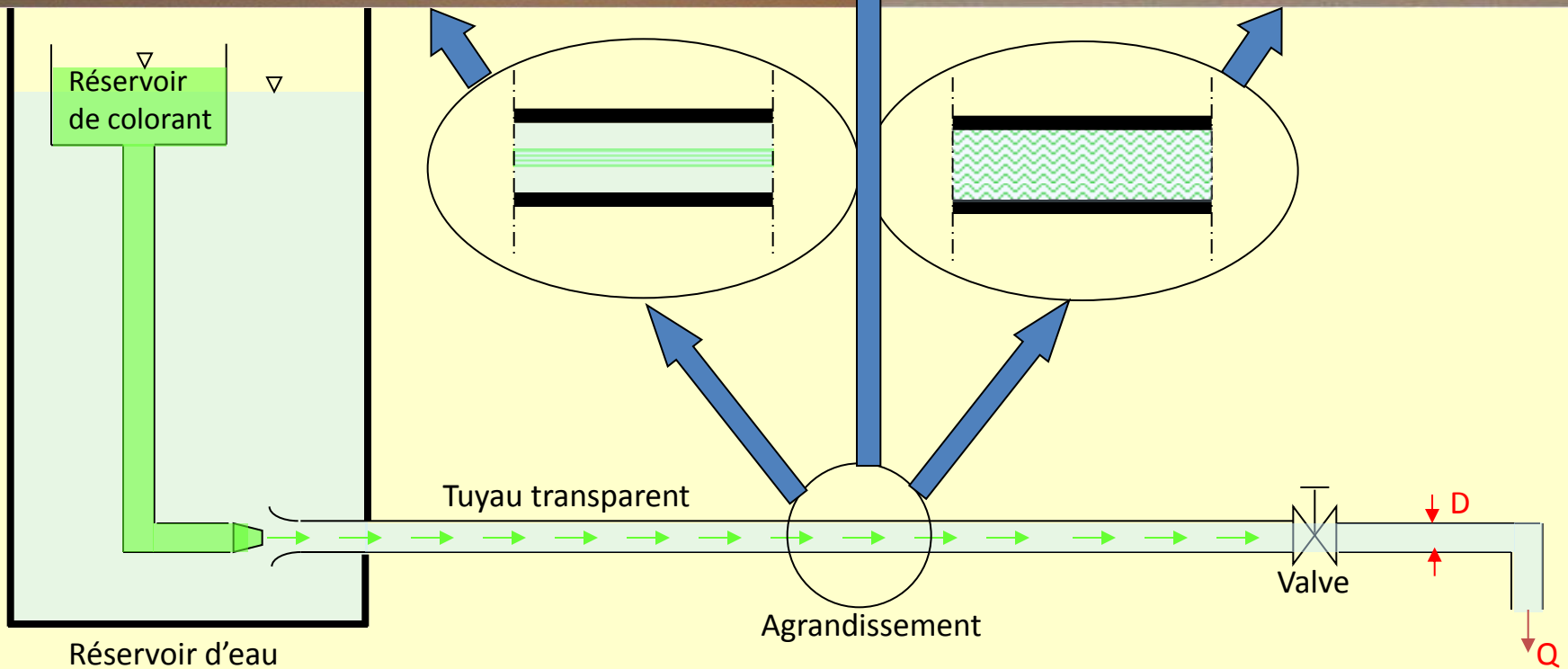
EXPERIENCE DE REYNOLDS

Écoulement laminaire

Écoulement turbulent

V faible \Rightarrow filet coloré bien défini

V élevée \Rightarrow filet coloré ondulé et instable



Comment caractériser le régime d'écoulement ?

La nature du régime d'écoulement se détermine par le « **nombre de Reynolds** » qui a pour expression :

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

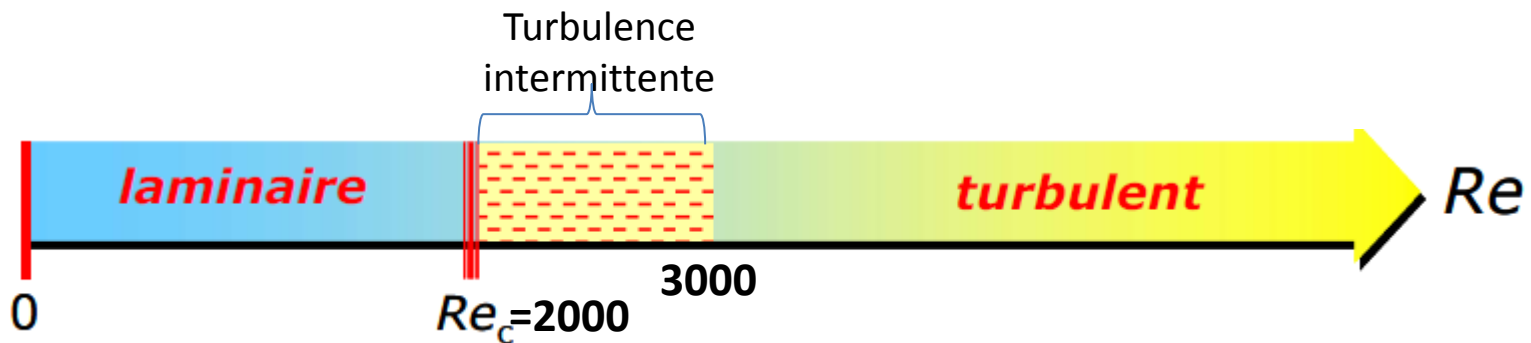
ν : viscosité cinématique (m^2 / s)

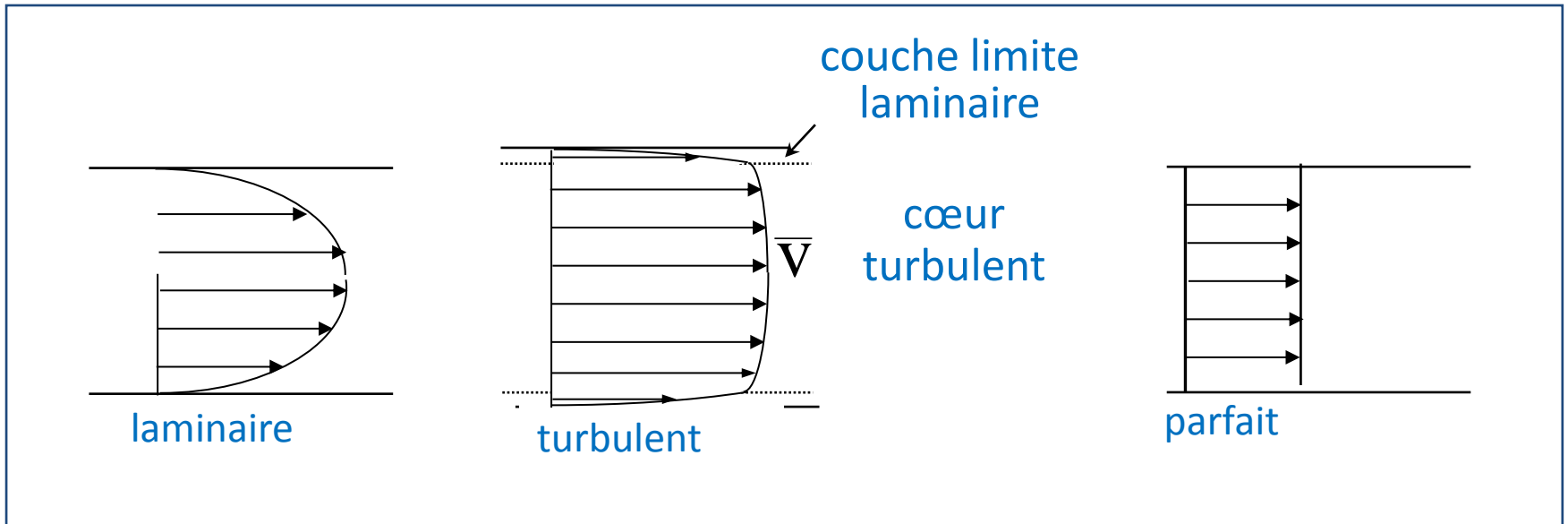
μ : viscosité dynamique (Pa.s)

D : diamètre de la canalisation (m)

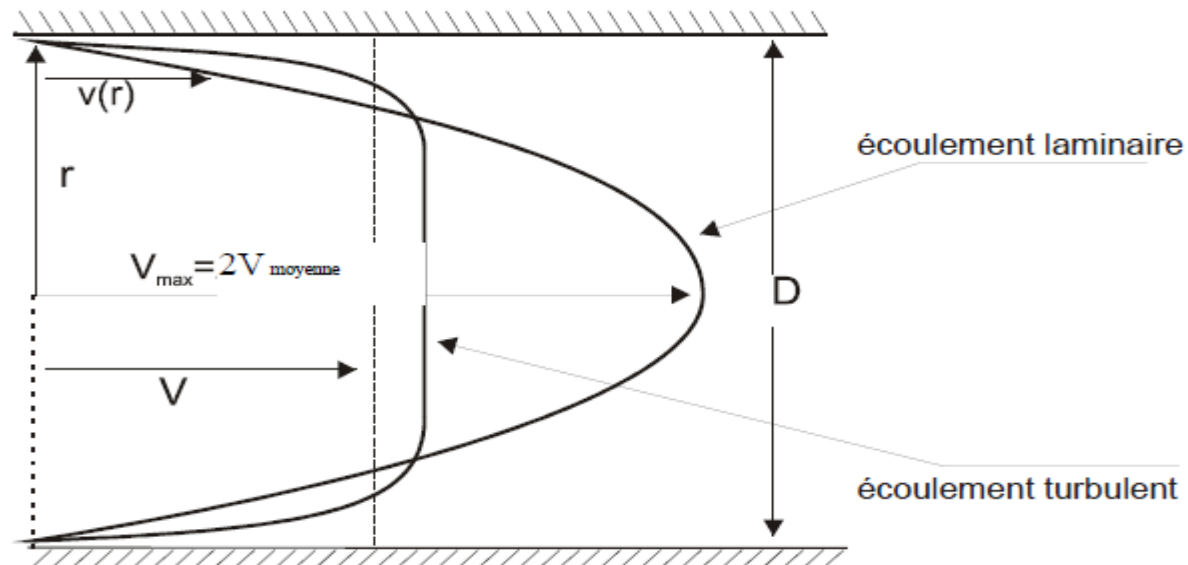
V : vitesse d'écoulement (m/s)

ρ : *masse* volumique du liquide (kg/m^3)





Distribution de vitesse en écoulement laminaire et en écoulement turbulent

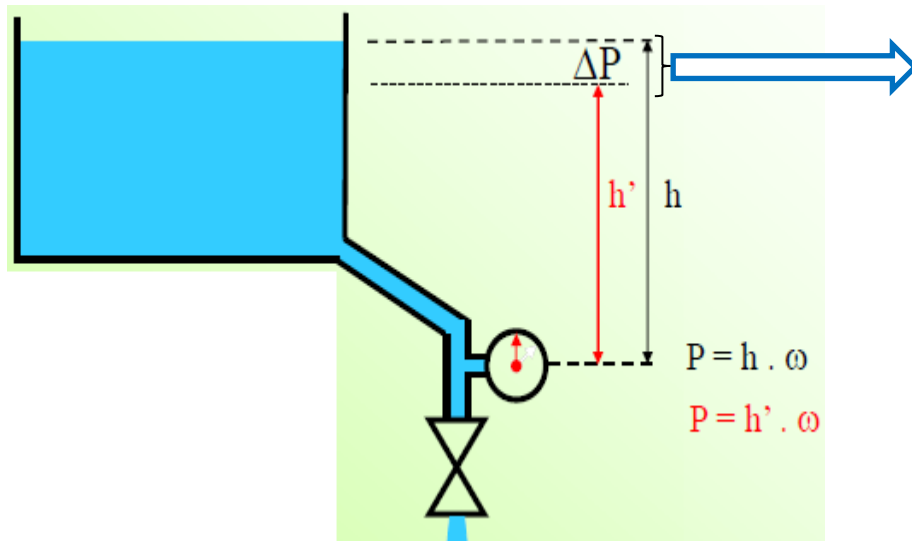
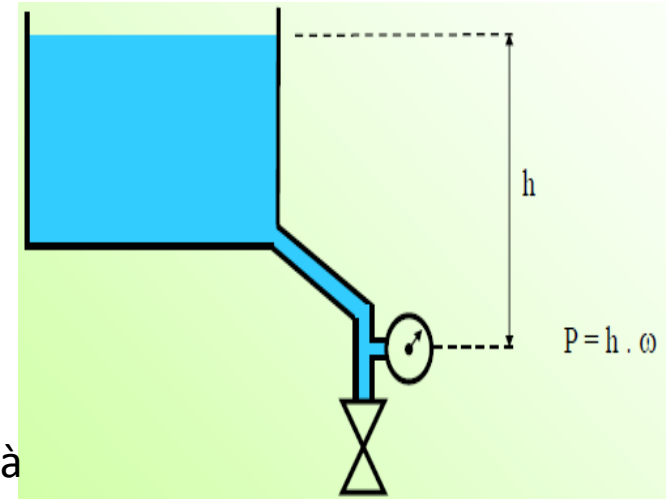


VIII- LES PERTES DE CHARGE

1- Mise en évidence

La vanne étant fermée, la pression P au manomètre dépend de la « charge d'eau » h .

Lorsque l'on ouvre la vanne, on s'aperçoit que la pression chute. Cette nouvelle pression correspond à une charge d'eau h' inférieure à la hauteur d'eau réelle h

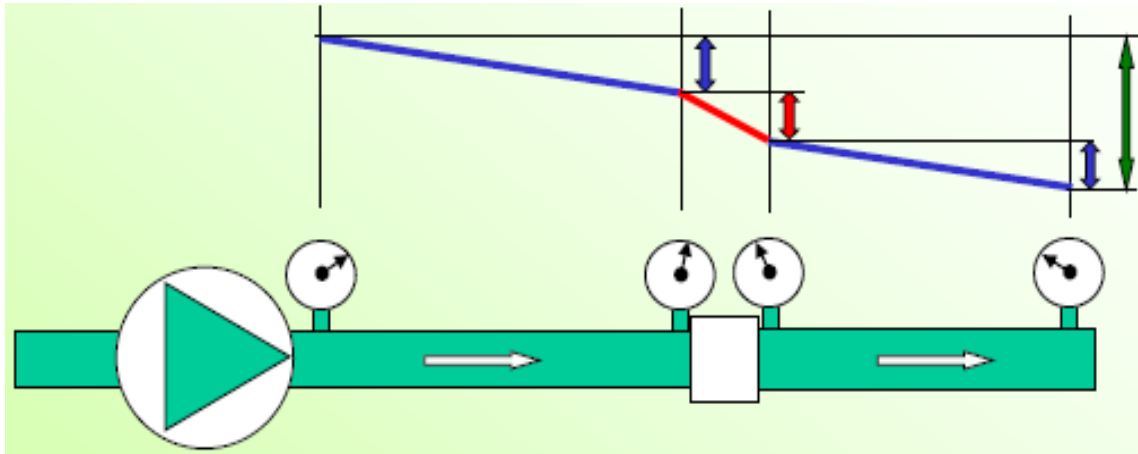


Perte de charge

- ✓ De la viscosité du liquide,
- ✓ de l'état de surface de la conduite,
- ✓ du débit de liquide dans la conduite,
- ✓ de la longueur de la conduite,
- ✓ des incidents de parcours

Ainsi, dans une installation hydraulique, le débit d'un liquide provoquera :

- des chutes de pression dues aux longueurs de tuyauteries droites: « pertes de charge linéaires (Δh_l)»,
- des chutes de pression dues à tous les incidents de parcours: « pertes de charge singulières (Δh_s)»,



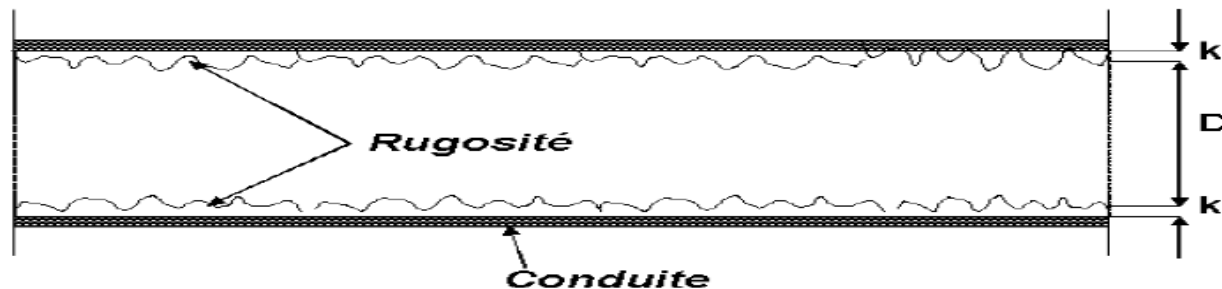
Pertes de charge totales:
$$\Delta h = \sum \Delta h_l + \sum \Delta h_s$$

2- Les pertes de charge linéaires

a- Notion de rugosité des conduites

Contrairement à une surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de *frottements* .

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur , notée ***k*** , et appelée "**Rugosité**" :



Afin de comparer la rugosité par rapport au diamètre de la conduite , on introduit le

rapport : $\varepsilon = \frac{k}{D}$: *Rugosité relative*

K= Rugosité absolue

Type de conduite	Rugosité k en mm
Conduites étirées (cuivre, etc...)	0,0015
Conduites en PVC et polyéthylène	0,007
Tuyauteries en acier du commerce	0,045
Conduites en amiante-ciment	0,05...0,1
Tuyauteries en fonte asphaltées	0,125
Conduits en tôle d'acier agrafés	0,15
Tuyauteries en acier galvanisé	0,15
Tuyauteries en acier rouillées	0,15...1,0
Conduits en bois	0,2...1,0
Tuyauteries en fonte	0,4...0,6
Conduits souples agrafés en spirale	0,6...2,0
Conduits treillis métallique et enduit	1,5
Tuyauteries en acier très rouillées	1,0...3,0
Conduits en béton brut de décoffrage	1,0...3,0
Conduits maçonnés	3,0...5,0

b- Expression de la perte de charge linéaire:

La perte de charge linéaire est calculée par la formule de **Darcy – Weisbach (1857)** :

$$\Delta h_l = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

- $L =$ Diamètre de la section d'écoulement (m)
- $L =$ Longueur de la conduite (m)
- $V =$ Vitesse d'écoulement (m/s)
- $\lambda =$ Coefficient de frottement (sans unité)

Plusieurs formules sont proposées pour le calcul de λ et dépendent du régime d'écoulement :

⇒ **Perte de charge en régime laminaire :**

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Formule de Poiseuille

⇒ **Perte de charge en régime turbulent:**

Parmi les formules de calcul du coefficient λ on trouve:

➤ Formule de **Colebrook – White** :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

⇒ **Diagramme de Moody :**

Les travaux de Nikuradse sur les pertes de charge dans les conduites ont permis d'élaborer un graphique (Diagramme de Moody) permettant de déterminer le coefficient λ en fonction de Re pour les différents types d'écoulement et des rugosités relatives k/D allant de $1/30$ à $1/1014$:

Détermination du coefficient de perte de charge en écoulement laminaire (*Poiseuille-Haggen*)

$$\Delta h_t = \frac{32\mu L V_m}{\rho g D^2} \quad (\text{Formule de Poiseuille en écoulement laminaire})$$

La perte de charge par unité de longueur, $\Delta h_t / L$ (Darcy-Weisbach), s'exprime généralement sous forme d'un coefficient sans dimension, dit **coefficient de perte de charge défini par :**

$$\lambda = \frac{\frac{\Delta h_t}{L}}{\frac{V_m^2}{2gD}}$$

$$\frac{\Delta h_t}{L} = \frac{32\mu V_m}{\rho g D^2} = \left(\frac{32\mu V_m}{\rho g D^2} * \frac{2g}{V_m^2} \right) \frac{V_m^2}{2g} = \left(\frac{64\mu}{\rho D^2 V_m} \right) \frac{V_m^2}{2g}$$

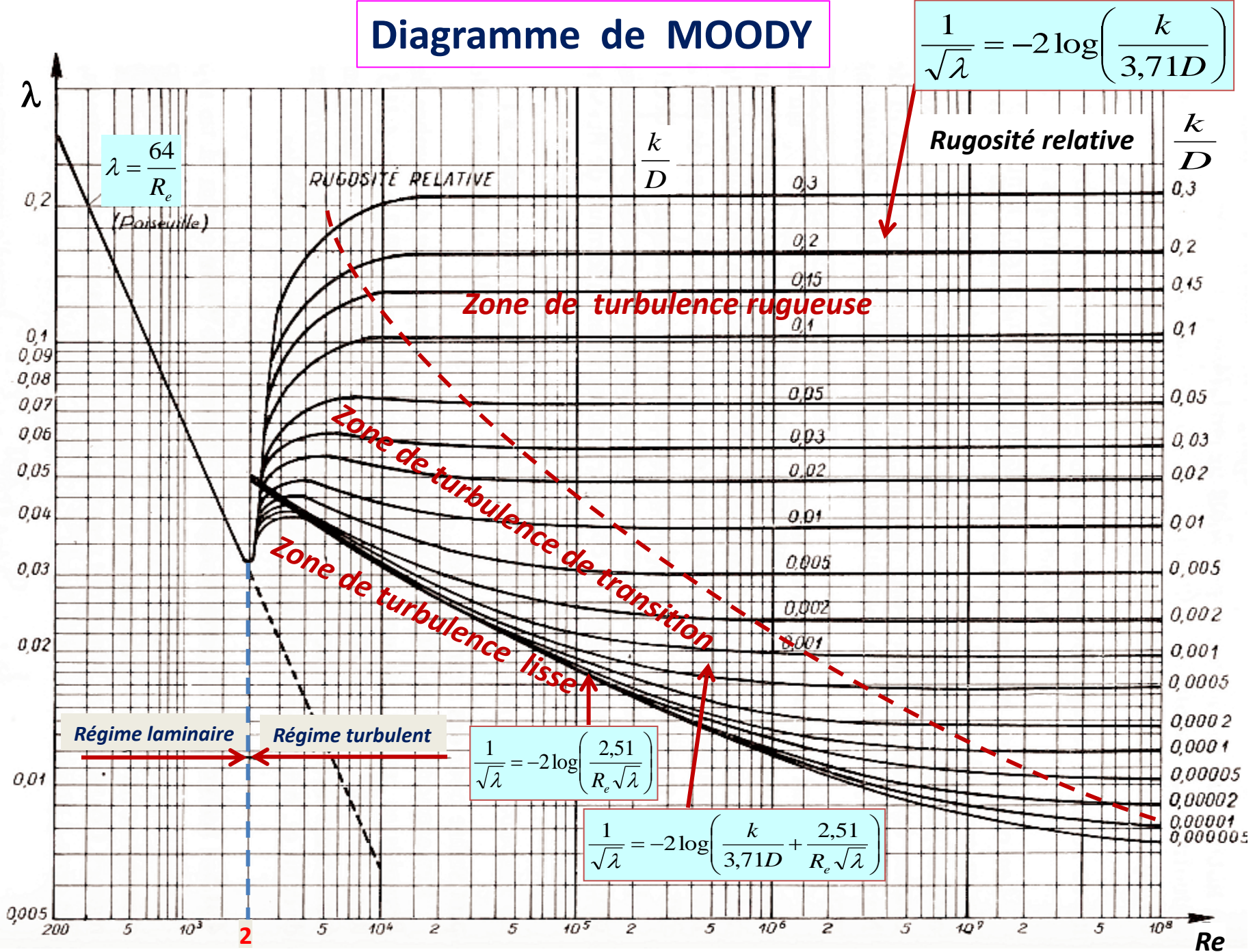
Sachant que : $R_e = \frac{\rho V D}{\mu}$

$$d'où \quad \frac{\Delta h_t}{L} = \left(\frac{64}{R_e D} \right) \frac{V_m^2}{2g}$$

Ainsi : $\lambda = \frac{64}{R_e}$

Formule de "Poiseuille"

Diagramme de MOODY



c- Autres expressions de la perte de charge linéaire:

c.1- Formule de Chézy :

La formule de Chézy est inspirée de celle de Darcy-weisbach :

En introduisant la notion de " Rayon hydraulique " R égal au rapport entre la surface A et le périmètre d'écoulement P

$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} \Rightarrow D = 4R_h$$

$$\Delta h_l = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{LV^2}{4R_h 2g} = \frac{\lambda LV^2}{8gR_h}$$

posons : $\frac{\Delta h_l}{L} = j$ j : pente hydraulique

$$j = \frac{\lambda V^2}{8gR_h} \Rightarrow j = \frac{V^2}{\frac{8g}{\lambda} R_h} \quad \text{posons } \frac{8g}{\lambda} = C^2 \quad C : \text{Coefficient de Chézy } (m^{0,5} / s)$$

$$d'où : j = \frac{V^2}{C^2 R_h} \quad (m / ml)$$

c.2- Formule de Manning- Strickler (expérimentale):

En cherchant expérimentalement la valeur de C Manning a trouvé que :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad n : \text{coefficient de rugosité}$$

posons $k = \frac{1}{n}$ $k : \text{Coefficient de Manning Strickler (m}^{0,5} / \text{s)}$

⇒

$$j = \frac{V^2}{K^2 R_h^{4/3}}$$

Nature des parois	<i>n</i>	1/ <i>n</i>
Béton lisse	<i>0.0133</i>	<i>75,19</i>
Canal en terre, enherbé	<i>0.02</i>	<i>50</i>
Rivière de plaine, large, végétation; peu dense	<i>0.033</i>	<i>30,3</i>
Rivière à berges étroites très végétalisées	<i>0.1-0.066</i>	<i>10-15,15</i>
Lit majeur en prairie	<i>0.05 -0.033</i>	<i>20-30,30</i>
Lit majeur en forêt	<i>< 0.1</i>	<i>< 10</i>

c.3- Formule de Scoby: $j = 2,5087 * 10^{-3} k_s \frac{V^{1,9}}{D^{1,1}}$ k_s : Coefficient t de Scoby ($m^{0,8} / s^{1,9}$)

$$j = 0,716 * k_s * Q^{1,9} * D^{-4,9}$$

$$j = 40,75 * k_s * Q^{1,9} * D^{-4,9}$$

j: Perte de charge linéaire par unité de longueur en m/m

Q : Débit d'écoulement en l/h

D : Diamètre intérieur de la conduite en mm

Q: Débit d'écoulement en m3/s

D: Diamètre intérieur de la conduite en m

Nature du tuyau	Ks
Alliage Aluminium	0,4
Plastique	0,37
Acier revêtu	0,42

Coefficient ks de Scoby

c.4- Formule de Hazen-Williams:

$$j = 6,818 \frac{V^{1,852}}{C_{HW}^{1,852} D^{1,167}}$$
 C_{HW} : Coefficient t de Hazen Williams ($m^{0,37} / s$)

$$j = 1,135 * 10^9 * \left(\frac{Q}{C}\right)^{1,852} * \frac{1}{D^{4,872}}$$

$$j = 10,675 * \left(\frac{Q}{C}\right)^{1,852} * \frac{1}{D^{4,872}}$$

j: Perte de charge linéaire par unité de longueur en m/m

Q: Débit d'écoulement en m3/h ;

C: Coefficient de rugosité dépendant de la nature de la conduite

D: Diamètre intérieur de la conduite en mm ;

Q : Débit d'écoulement en m3/s

D : Diamètre intérieur de la conduite en m

Nature du tuyau	C
PVC	150
PE	145
Acier revêtu	130-150
Fonte revêtu	135-150
Aluminium	120
Fonte encrassée	80-120

Coefficient C de Hazen Williams

c.5- Formule Blasius:

$$j = 0,478 * D^{-4,75} * Q^{1,75}$$

Cas de canalisations en polyéthylène (PE)

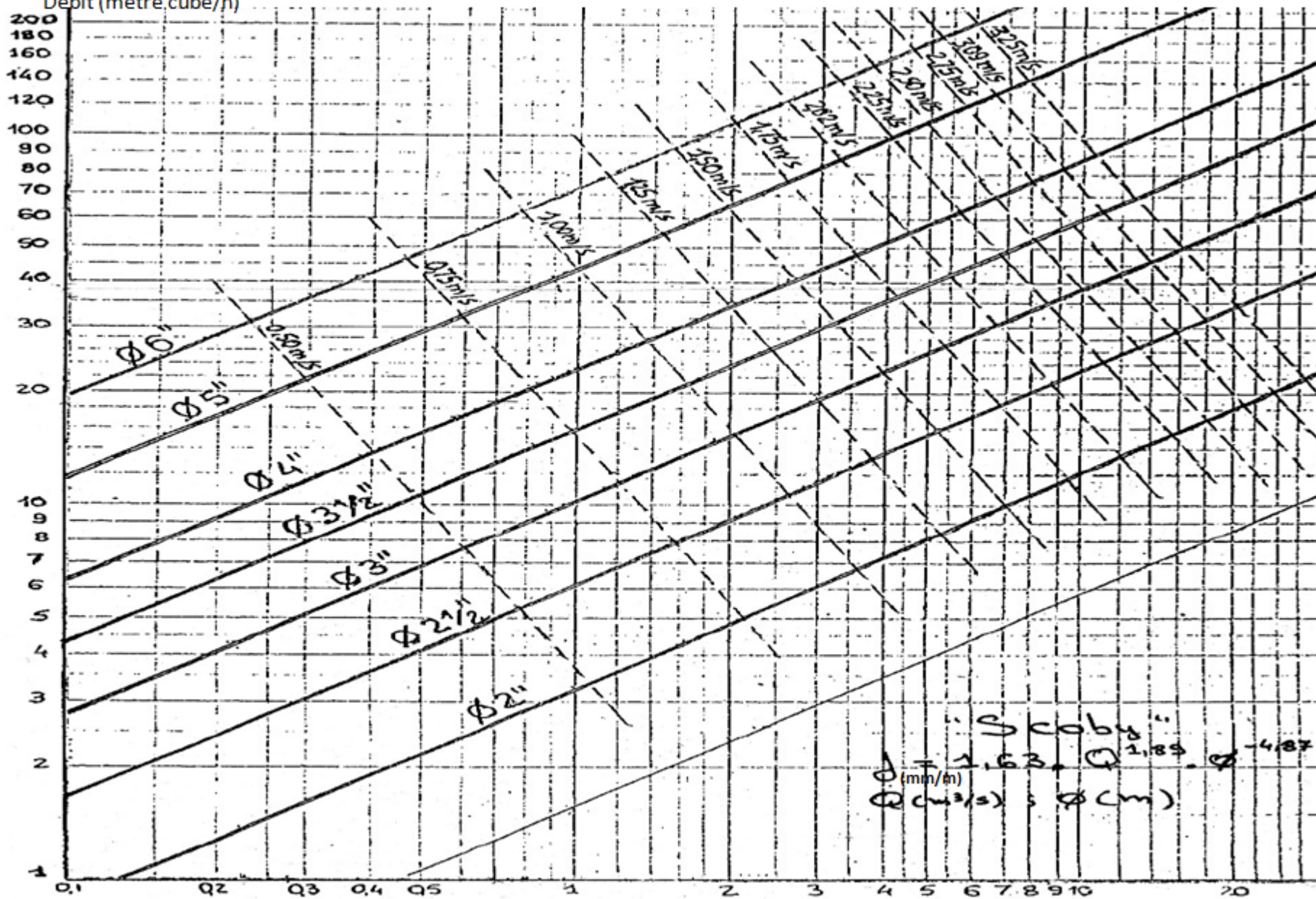
$$j = 0,452 * D^{-4,75} * Q^{1,75}$$

Cas de canalisations en polychlorure de vinyle (PVC)

j: Perte de charge linéaire par unité de longueur en m/m; D : diamètre intérieure (mm); Q: débit de la rampe (l/h)

ABaque POUR TUYAUX EN ALLIAGE D'ALUMINIUM A ACCOUPLEMENT RAPIDE PERTES SING 20 %

Débit (mètre cube/h)

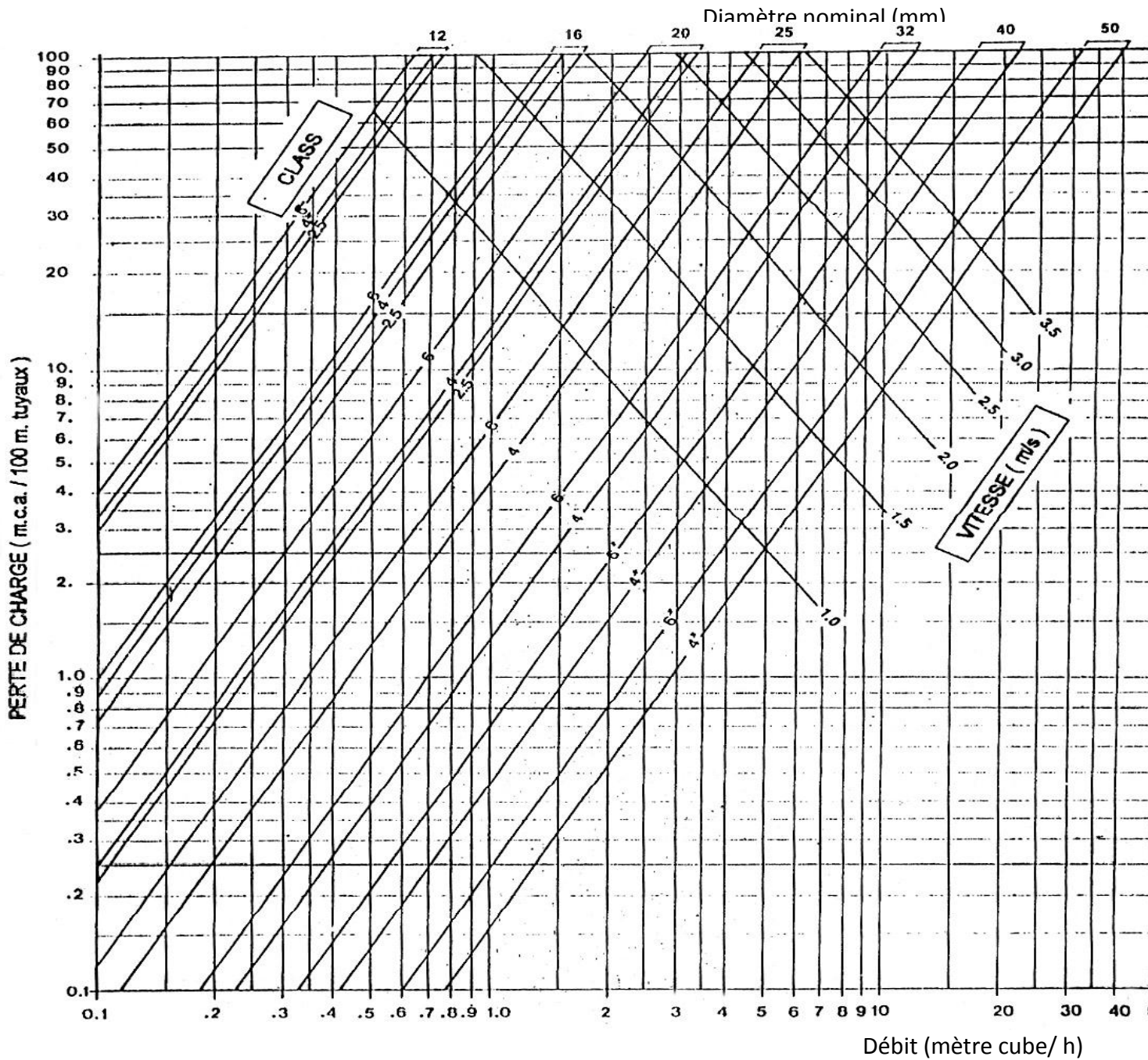


$$D = 1.63 \cdot Q^{0.25} \cdot L^{0.75} \cdot \frac{100}{\Delta P}$$

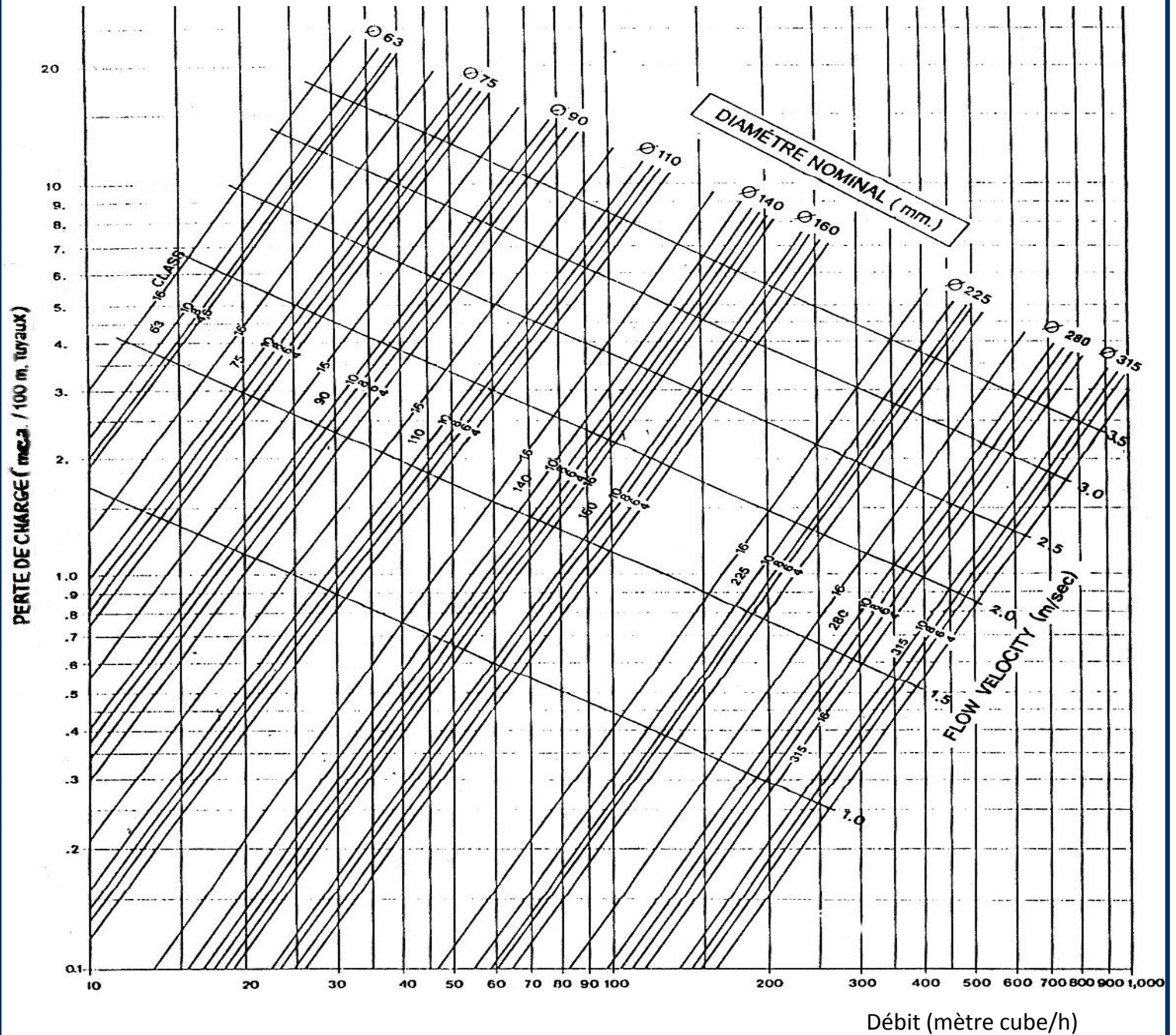
$$Q \text{ (m}^3/\text{s)} = \frac{D \text{ (m)}}{4.07}$$

Pertes de charge (%)

ABAQUE POUR TUYAUX EN POLYETHYLENE BASSE DENSITE



ABAQUE POUR TUYAUX EN PVC



- *Formule générale de pertes de charge linéaires unitaires:*

$$j = k \frac{Q^m}{D^n} = k Q^m D^{-n}$$

- *Pertes de charge linéaires totales:*

$$\Delta h_l = J = j * L$$

Exemple:

Calculer, en utilisant le diagramme de Moody, la perte par frottement dans une conduite en acier soudé d'un diamètre de 900 mm sur une longueur de 500 m, parcourue par un débit de 2,3 m³/s.

La vitesse moyenne de l'eau est $4Q / (\pi D^2) = 1,886 \text{ m/s}$

A partir de la table, $k = 0,6$ et par conséquent $k/D = 0,6/900 = 0,000617$

$Re = DV / \nu = (0,9 \times 1,886) / 1,31 = 1,3 \times 10^6$ ($\nu = 1,31 \cdot 10^{-6}$)

Sur le diagramme de Moody, pour $k/D = 0,00062$ et $Re = 1,3 \cdot 10^6$, nous avons $\lambda = 0,019$

$$\Delta h_f = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0,019 \frac{500}{0,9} \cdot \frac{1,886^2}{2 \cdot 9,81} = 1,91 \text{ m}$$

Exemple:

En utilisant les paramètres de l'exemple précédent, calculer la perte de charge en appliquant la formule de Manning, en considérant $n = 0,012$ pour une conduite en acier soudé.

$$j = \frac{V^2}{K^2 R_h^{4/3}} = \frac{4^{4/3} * 1,886^2 * 0,012^2}{0,9^{4/3}} = 0,00374 \text{ m}$$

$$d'où : J = j * L = 500 * 0,00374 = 1,87 \text{ m}$$

Calculer, en utilisant l'équation de Colebrook et la formule de Manning, la perte de charge par frottement dans une conduite soudée de 500 m de long, de respectivement 500 mm, 800 mm, 1 200 mm et 1 500 mm de diamètre, avec une vitesse moyenne de 4 m/s.

D (mm)	500	800	1200	1500
Q (m ³ /s)	0,785	2,011	4,524	7,069
V (m/s)	4	4	4	4
L (m)	500	500	500	500

En appliquant Colebrook-White

k (mm)	0,6	0,6	0,6	0,6
J (m)	17,23	9,53	5,73	4,35

En appliquant Manning

n	0,012	0,012	0,012	0,012
J (m)	18,40	9,85	5,73	4,26

3- Les pertes de charge singulières

La présence d'une singularité (d'un obstacle) sur l'écoulement dans une conduite comme un coude, un diaphragme, un élargissement brusque, une contraction, etc. crée un ΔP local appelé **perte de charge singulière**.

Dans la pratique industrielle, cette perte de charge est écrite sous la forme :

$$\Delta h_s = k \frac{V^2}{2g}$$

où le coefficient de perte de charge K , qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds, est donné dans des formulaires appelés « dictionnaires de pertes de charge ». Quelques singularités typiques sont reproduites ci-dessous.

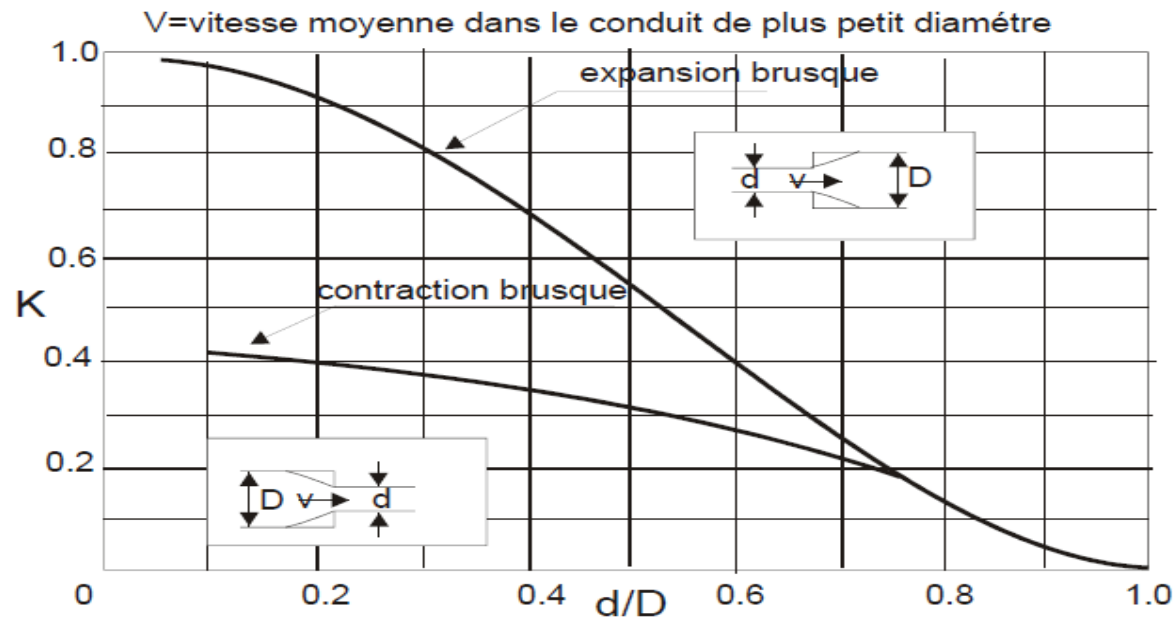
Exemple de calculs des pertes de charges dans un élargissement ou un rétrécissement brusque



$$\Delta h_s = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} = \left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g} = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) \frac{V_1^2}{2g} = k \frac{V_1^2}{2g}$$

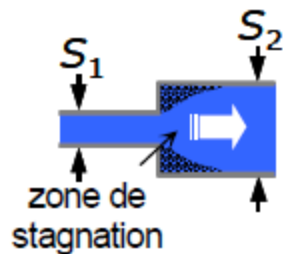
V_1 : vitesse du liquide dans la conduite de plus petit diamètre

Valeurs de K_c et de K_{ex} en fonction de d/D



Elargissement brusque

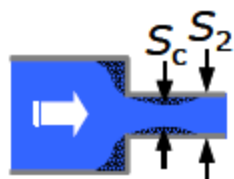
$$K = (1 - S_1/S_2)^2$$



Rétrécissement brusque

$$K = (1/\mu - 1)^2$$

$$\mu = S_c/S_2$$



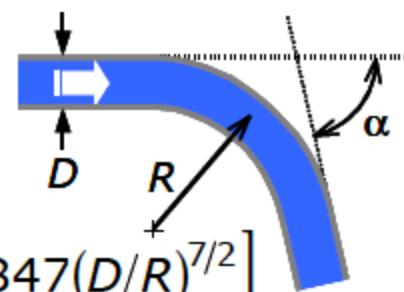
Coude brusque

$$K = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$



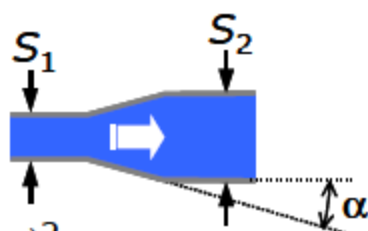
Coude arrondi

$$K = \frac{\alpha}{\pi} \left[0,131 + 1,847(D/R)^{7/2} \right]$$



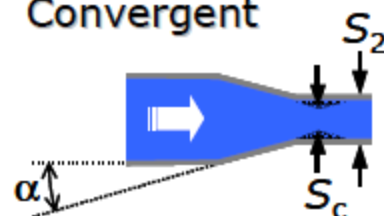
Divergent

$$K = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$

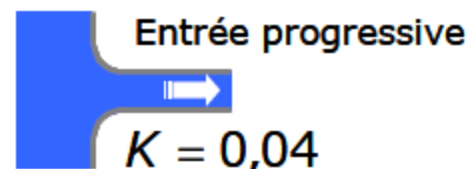
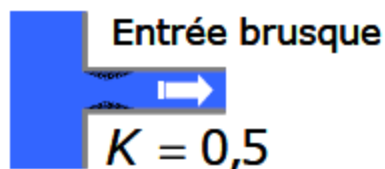


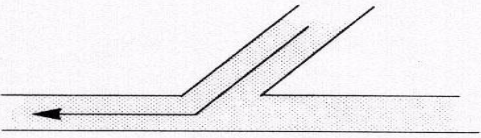
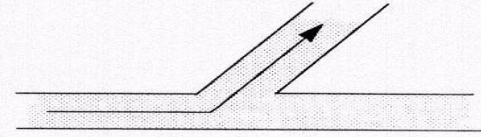
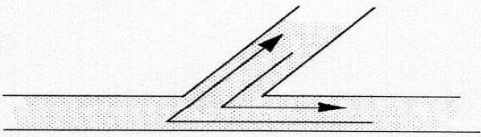
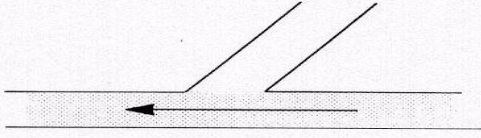
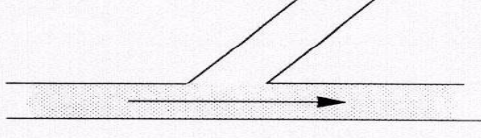
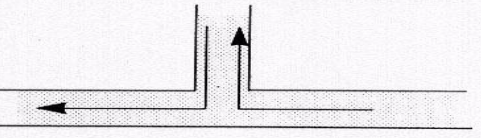
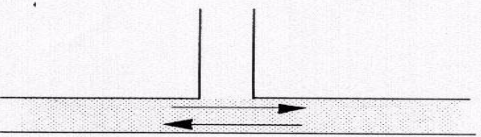
Convergent

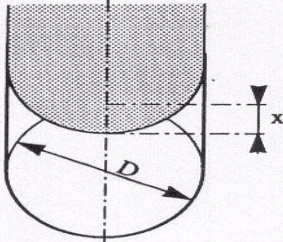
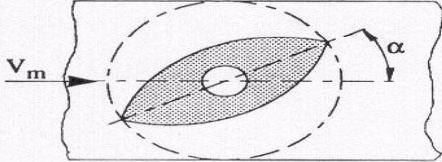
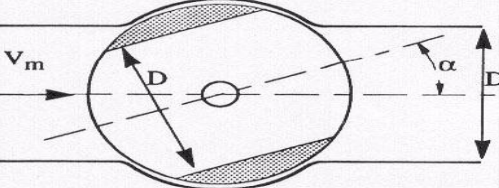
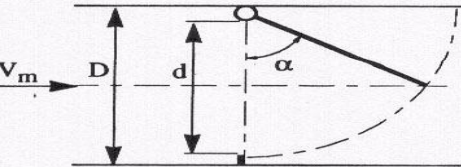
$$K = (1/\mu - 1)^2 \sin \alpha$$



Entrée d'une canalisation



SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K
<p>9) Branchements et dérivations de mêmes diamètres (d'après SCIMEMI)</p> 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,5$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 3$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,05$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,15$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 1,5$
	$K \frac{V_m^2}{2g}$	$K = 0,10$

SINGULARITE	PERTE DE CHARGE	VALEUR DE K																														
ROBINETTERIES																																
10) Vanne opercule 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>$\frac{x}{D}$</th> <th>$\frac{1}{8}$</th> <th>$\frac{2}{8}$</th> <th>$\frac{3}{8}$</th> <th>$\frac{4}{8}$</th> <th>$\frac{5}{8}$</th> <th>$\frac{6}{8}$</th> <th>$\frac{7}{8}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,07</td> <td>0,26</td> <td>0,81</td> <td>2,06</td> <td>5,52</td> <td>17</td> <td>98</td> </tr> </tbody> </table> <p>La réduction du débit est sensible en fin de course.</p>	$\frac{x}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98														
$\frac{x}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$																									
K	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98																									
11) Vanne papillon 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,24</td> <td>0,52</td> <td>0,90</td> <td>1,5</td> <td>3,9</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>11</td> <td>19</td> <td>33</td> <td>118</td> <td>750</td> </tr> </tbody> </table>	α°	5	10	15	20	30	K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9	α°	40	45	50	60	70	K	11	19	33	118	750						
α°	5	10	15	20	30																											
K	0,24	0,52	0,90	1,5	3,9																											
α°	40	45	50	60	70																											
K	11	19	33	118	750																											
12) Robinet à Boisseau 	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>5</th> <th>10</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0,05</td> <td>0,29</td> <td>0,75</td> <td>1,6</td> <td>3,1</td> <td>5,5</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>35</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>55</th> <th>60</th> <th>65</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>9,7</td> <td>17</td> <td>31</td> <td>53</td> <td>110</td> <td>206</td> <td>490</td> </tr> </tbody> </table>	α°	5	10	15	20	25	30	K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5		35	40	45	50	55	60	65	K	9,7	17	31	53	110	206	490
α°	5	10	15	20	25	30																										
K	0,05	0,29	0,75	1,6	3,1	5,5																										
	35	40	45	50	55	60	65																									
K	9,7	17	31	53	110	206	490																									
13) Clapet à battant  <p style="text-align: center;">$d = 0,73 D$</p>	$K \frac{V_m^2}{2g}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>α°</th> <th>15</th> <th>20</th> <th>25</th> <th>30</th> <th>35</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>90</td> <td>62</td> <td>42</td> <td>30</td> <td>20</td> </tr> </tbody> </table> <table border="1"> <thead> <tr> <th>α</th> <th>40</th> <th>45</th> <th>50</th> <th>60</th> <th>70</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>14</td> <td>9,5</td> <td>6,6</td> <td>3,2</td> <td>1,7</td> </tr> </tbody> </table>	α°	15	20	25	30	35	K	90	62	42	30	20	α	40	45	50	60	70	K	14	9,5	6,6	3,2	1,7						
α°	15	20	25	30	35																											
K	90	62	42	30	20																											
α	40	45	50	60	70																											
K	14	9,5	6,6	3,2	1,7																											
<p>La Société PONT A MOUSSON donne les valeurs de K pour le clapet positionné horizontalement, comme sur le schéma alors que M. CARLIER (Hydraulique générale et appliquée) donne les mêmes valeurs pour le clapet positionné vericalement.</p>																																

Accessoires



TF-1



Raccordement mixte
filetage male

TF-2



Raccordement mixte
filetage femelle

TF-3



Raccordement droit

TF-4



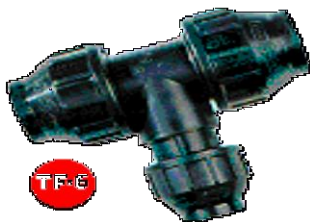
Raccordement de
réduction

TF-5



T égal

TF-6



T réduit

TF-7



T
Filetage femelle

TF-8



Relais coude
90°

TF-9



Coude 90°
filetage male

TF-10



Coude 90°
filetage femelle

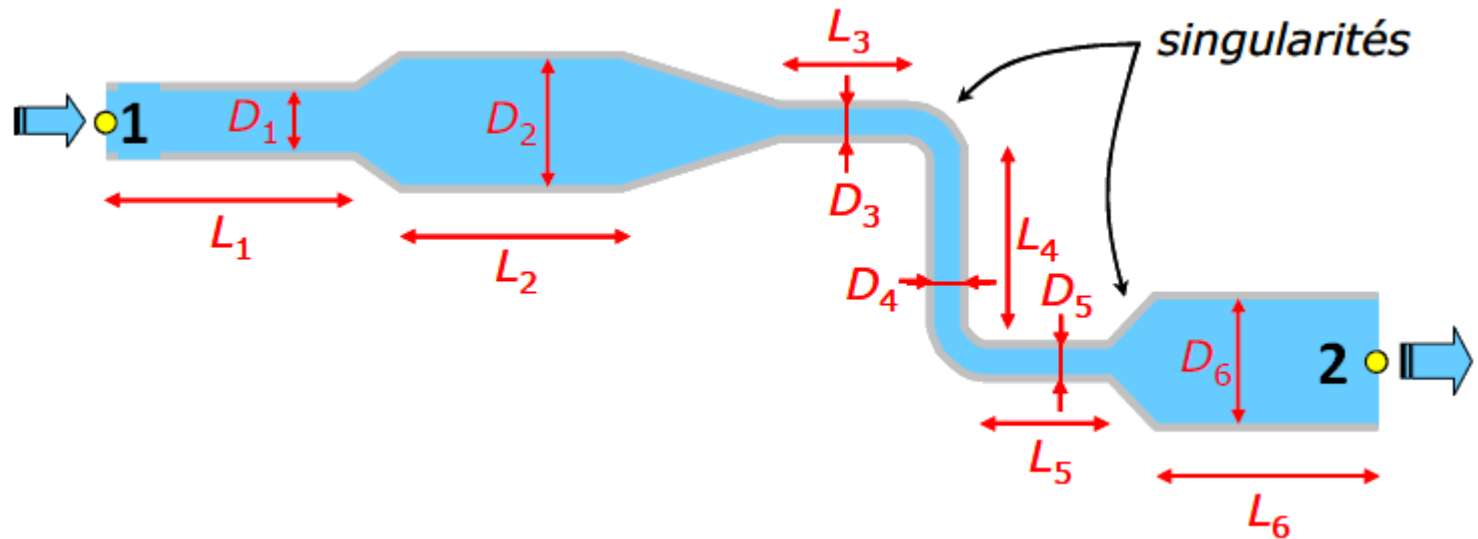
TF-11



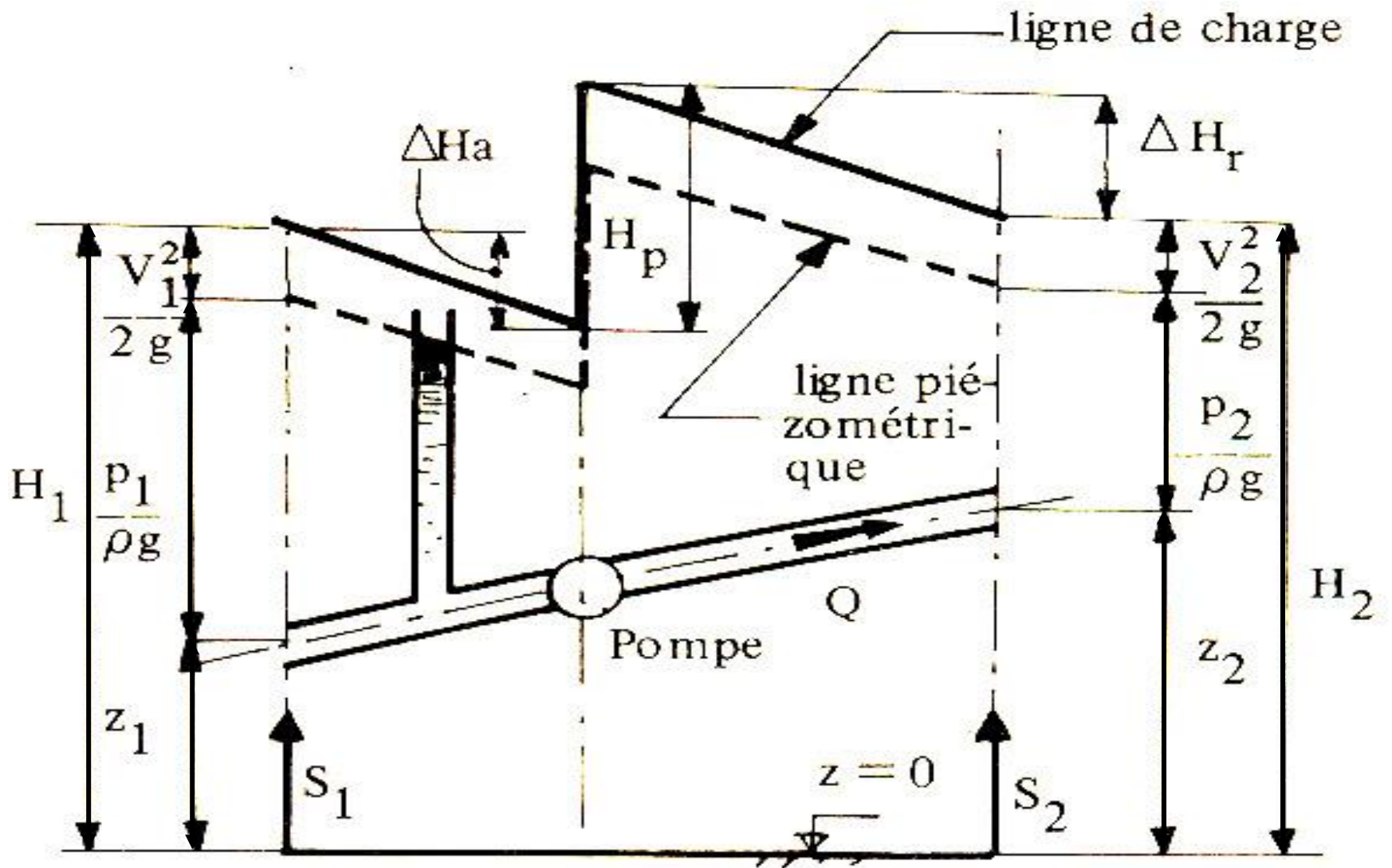
Bouchon final

Accessoires

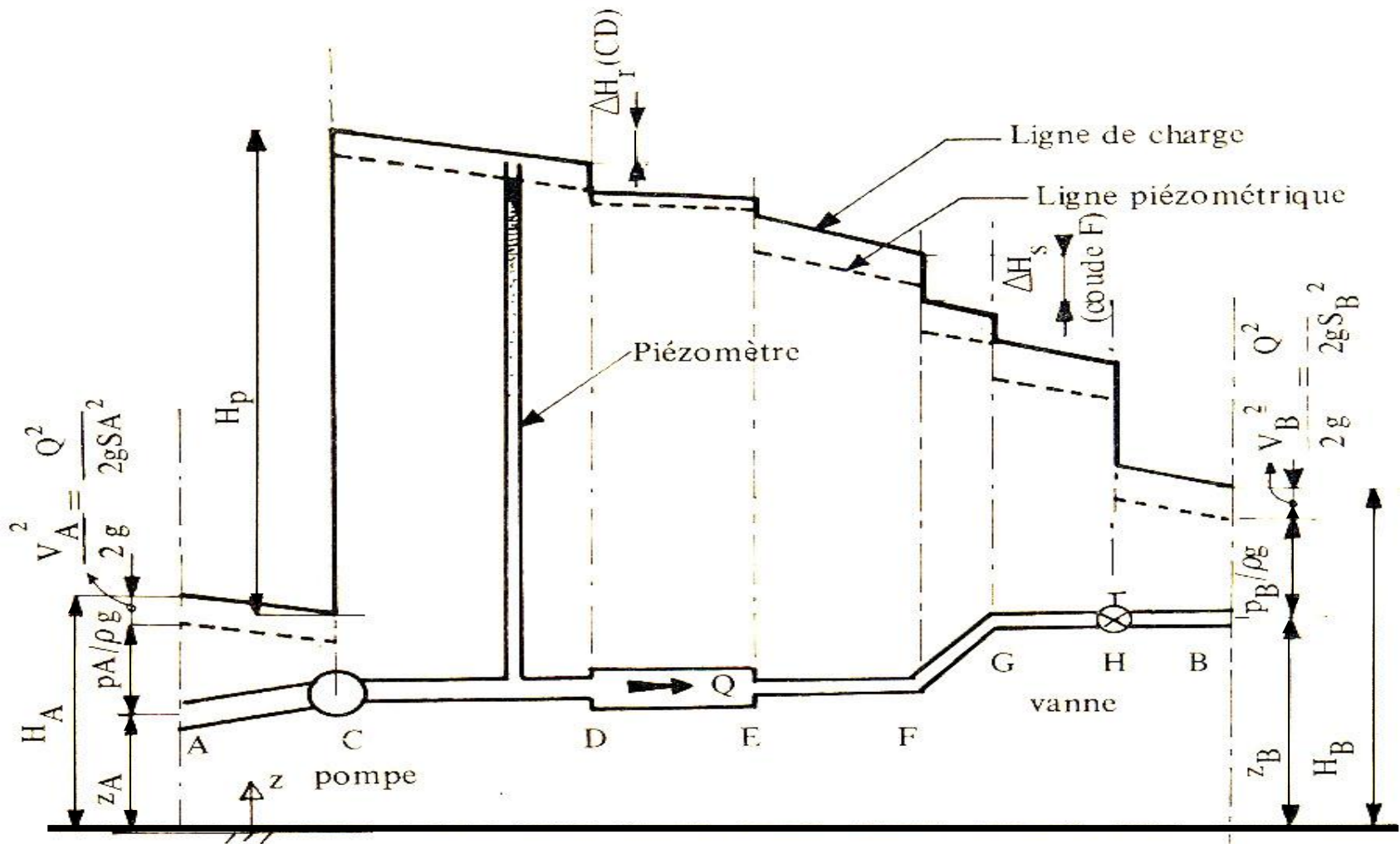
Généralisation de l'équation de Bernoulli :



$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum_i \lambda_i \frac{L_i V_i^2}{2g D_i} + \sum_j k_j \frac{V_j^2}{2g}$$



Représentation graphique du théorème de Bernoulli dans un circuit avec pompe en aspiration (pertes singulières négligeables)



$\Delta H_r (CD)$: perte de charge linéaire dans le tronçon CD

$\Delta H_s (\text{coude F})$: perte de charge singulière au droit du coude F

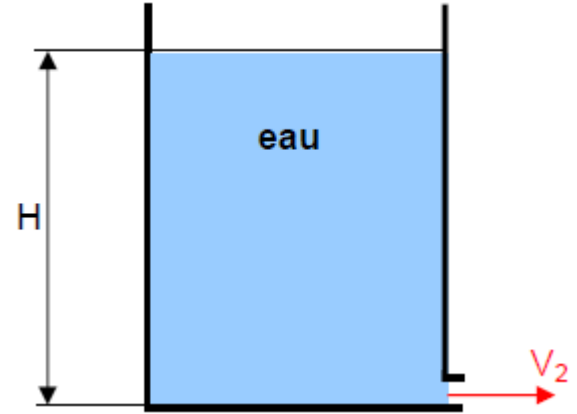
Représentation graphique du théorème de Bernoulli dans un circuit avec pompe en considérant les pertes de charge linéaires et singulières.

X- APPLICATIONS DE L'EQUATION GÉNÉRALE D'ÉCOULEMENT

Théorème de Toricelli:

On considère un réservoir rempli d'eau à une hauteur $H = 3 \text{ m}$, muni d'un petit orifice à sa base de diamètre $d = 10 \text{ mm}$.

- 1) En précisant les hypothèses prises en comptes, appliquer le théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait pour trouver la vitesse V_2 .
- 2) En déduire le débit volumique Q_v en (l/s) en sortie de l'orifice.



- 1) Vitesse d'écoulement V_2

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$V_1 \approx 0 ; p_1 = p_2 = p_{atm}$$

$$d'où : V_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 * 9,81 * 3} = 7,67 \text{ m/s}$$

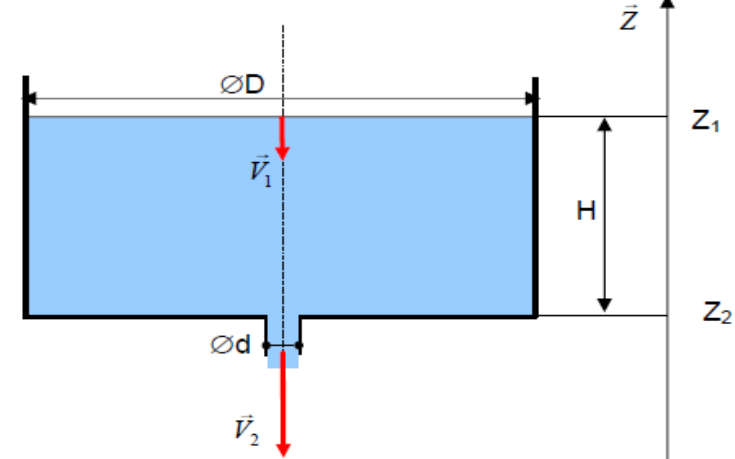
- 2) Débit volumique

$$Q = V_2 S = 7,67 \frac{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,6 \text{ l/s}$$

Vidange d'un réservoir à niveau constant:

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur $D = 2$ m rempli d'eau jusqu'à une hauteur $H = 3$ m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice gueule bée de diamètre $d = 10$ mm et de coefficient de pertes de charge $k=1$, permettant de faire évacuer l'eau.

Calculer:



- 1) la vitesse d'écoulement V_2 en supposant que le diamètre d est négligeable devant D ?
- 2) En déduire le débit volumique en négligeant l'effet de contraction de la section de sortie ?

1) Vitesse d'écoulement V_2 :

$$\frac{\pi D^2}{4} V_1 = \frac{\pi d^2}{4} V_2 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_2$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h_s$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm} \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{d}{D}\right)^4 + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + k \frac{V_2^2}{2g}$$

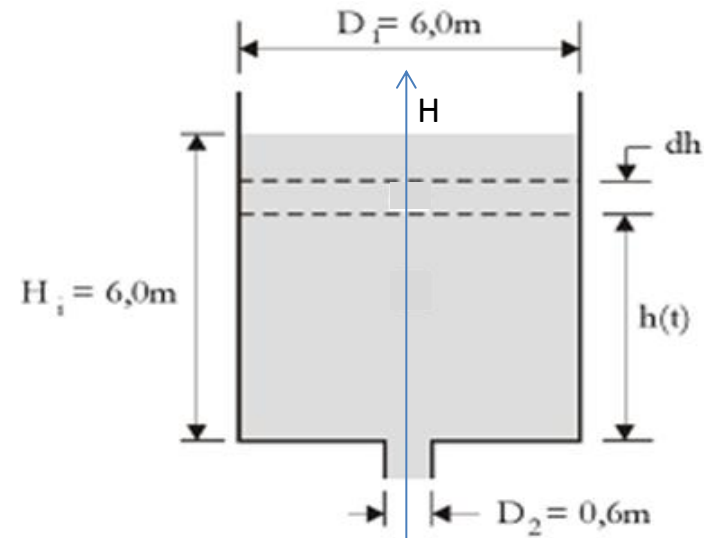
$$d'où : V_2 = \sqrt{\frac{2gH}{k+1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = \sqrt{gH} = 5,42 \text{ m/s}$$

$$2) \text{ Débit volumique: } Q = V_2 S = 5,42 \frac{\pi 0,01^2}{4} = 4,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Temps de vidange dans un réservoir à niveau variable:

On considère un réservoir circulaire de diamètre $D_1 = 6 \text{ m}$ muni à son fond d'un orifice de vidange circulaire de diamètre $D_2 = 0,6 \text{ m}$, ayant un coefficient de débit $m = 0,6$. Initialement, ce réservoir est rempli jusqu'à une hauteur initiale $H_1 = 6 \text{ m}$.

Quel est le temps nécessaire pour vidanger le réservoir ?



$$\left. \begin{aligned} Q_{entrant} &= \frac{dV}{dt} = -S_1 \frac{dh}{dt} \\ Q_{sortant} &= mS_2 \sqrt{2gh} \end{aligned} \right\} \text{écoulement permanent } Q_e = Q_s$$

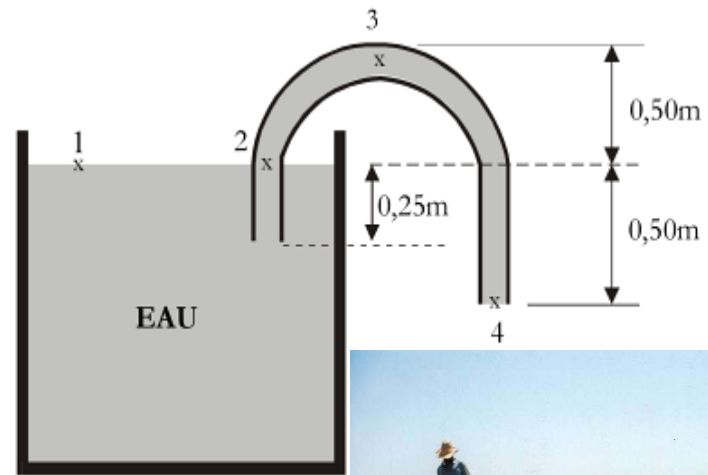
$$\Rightarrow dt = \frac{S_1}{mS_2} \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$$

$$t = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{S_1}{mS_2 \sqrt{2g}} \int_{H_1}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2S_1}{mS_2 \sqrt{2g}} \left[\sqrt{h} \right]_0^{H_1} = \frac{2S_1 \sqrt{H_1}}{mS_2 \sqrt{2g}}$$

$$\text{ou } t = \frac{2S_1 H_1}{mS_2 \sqrt{2gH_1}} = 2 \frac{\text{Volume initial}}{\text{débit initial}} = 2 \frac{D_1^2 * H_1}{0,6 D_2^2 \sqrt{2gH_1}} = 184 \text{ s} = 3 \text{ mn}$$

Siphon de vidange :

On considère un siphon de diamètre= 2 cm. En négligeant les pertes de charge dans le siphon, calculer les pressions relatives aux points 2 et 3 et la vitesse au point 2 ?



$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_4}{\rho g} + \frac{V_4^2}{2g} + z_4$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_4}{\rho g} + \frac{V_4^2 - V_2^2}{2g} + z_4 - z_2$$

$$= 0 + 0 - 0,5 \text{ m} = -0,5 \text{ m}$$

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + z_3$$

$$\Rightarrow \frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2 - V_3^2}{2g} + z_2 - z_3 = 0 - 0,5 \text{ m} - 0,5 \text{ m} = -1 \text{ m}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 - z_2 = 0,5$$

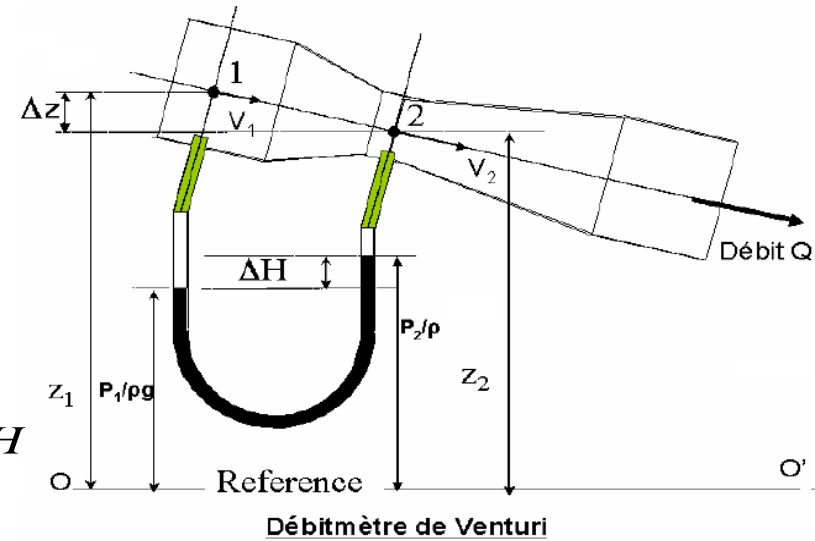
$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2g \cdot 0,5} = 3,13 \text{ m/s}$$

Le tube de Venturi:

En négligeant les pertes de charge, calculer le débit dans la conduite :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = (z_2 - z_1) + \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho g} \right) = \Delta z + \Delta H$$



Sachant que : $S_1 V_1 = S_2 V_2$

$$\text{Donc : } \frac{V_2^2}{2g} - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \Delta z + \Delta H \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] = \Delta z + \Delta H$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2g(\Delta H + \Delta z)} \quad \text{par conséquent : } Q = \frac{S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2g(\Delta H + \Delta z)}$$

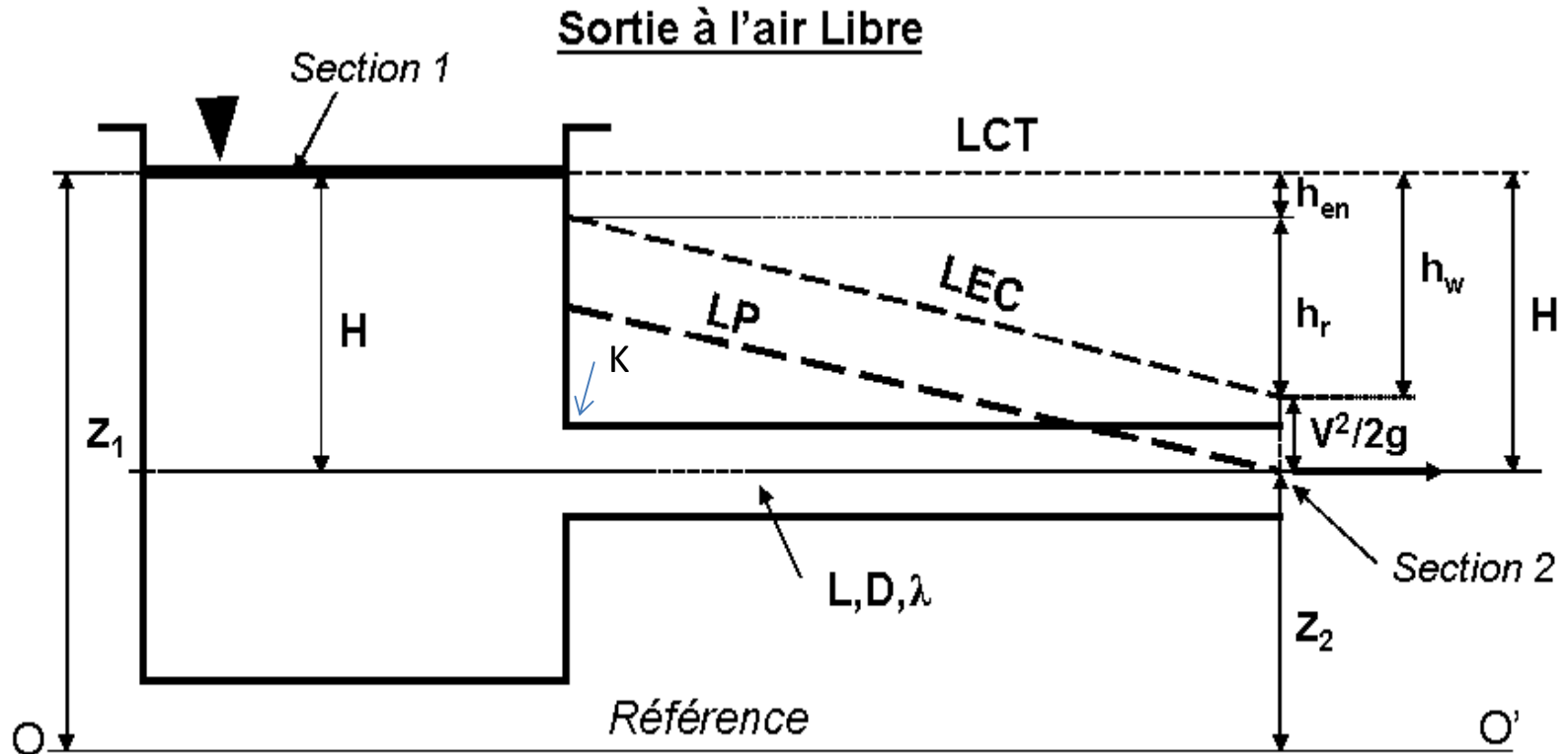
Remarque : Dans la plupart des cas, le débitmètre de Venturi est placé horizontalement ce qui fait que $z_1 = z_2$ et donc : $\Delta z = 0$ et la formule précédente se simplifie :

$$Q = \frac{S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2}} \sqrt{2g(\Delta H)} = \frac{\rho d_2^2}{\sqrt[4]{1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4}} \sqrt{2g(\Delta H)}$$

Branchements de conduites

□ Conduite à section constante (conduite simple)

a- Sortie à l'air libre



LCT = Ligne de Charge Totale LEC = Ligne d'Énergie Cinétique LP = Ligne Piézométrique

On se propose d'établir l'expression du débit d'écoulement du système :
Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

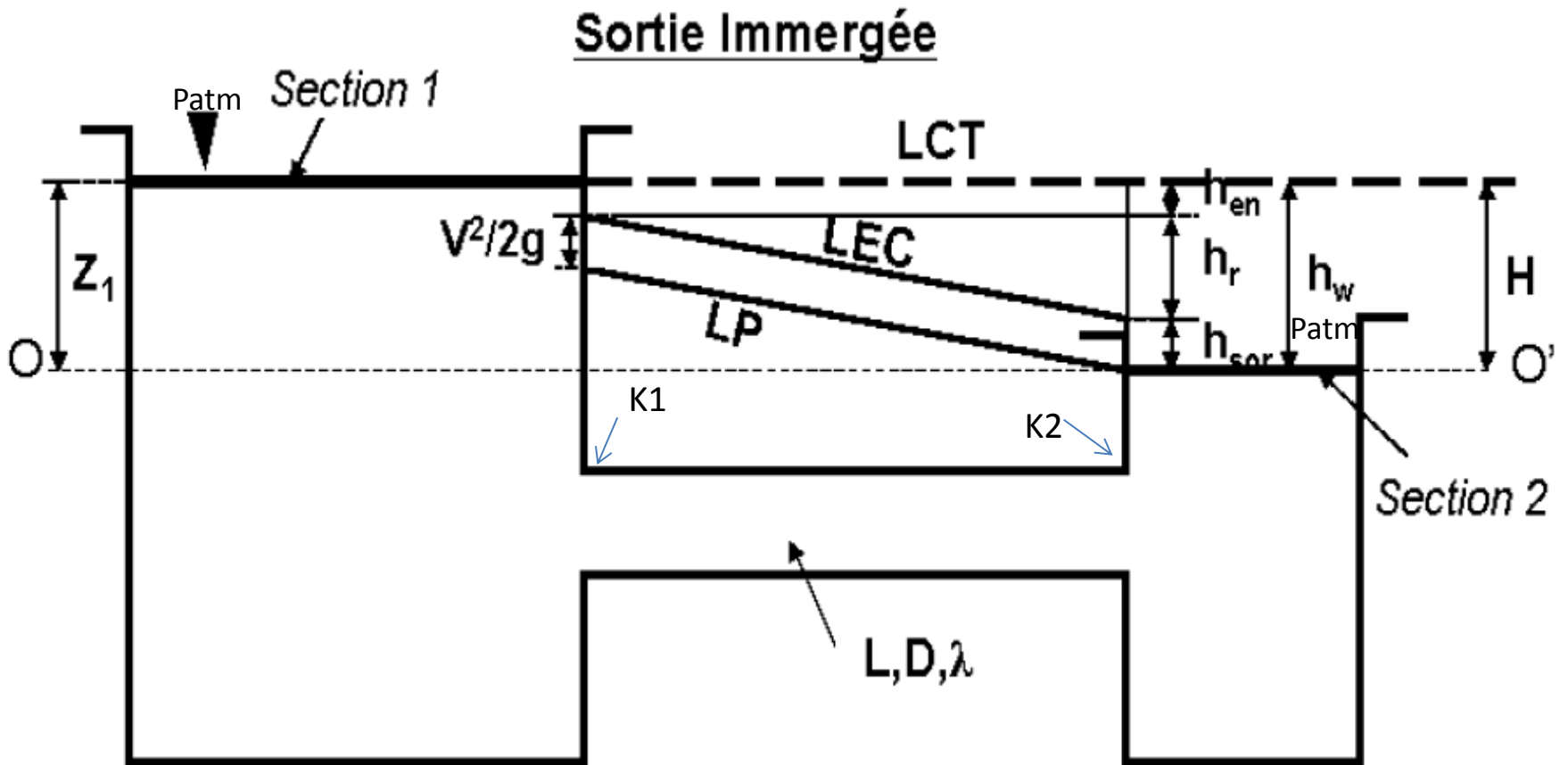
$$p_1 = p_2 = p_{atm} ; V_1 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_2 = H = \frac{V^2}{2g} + \Delta h$$

$$H = \frac{V^2}{2g} + \Delta h = \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{LV^2}{2gD} + k \frac{V^2}{2g} = \left[1 + \lambda \frac{L}{D} + k \right] \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + k}} \sqrt{2gH}$$

$$\text{ou : } Q = \frac{\pi D^2}{\sqrt[4]{1 + \lambda \frac{L}{D} + k}} \sqrt{2gH}$$

b- Sortie immergée :



On se propose d'établir l'expression du débit d'écoulement du système :
Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm} ; V_1 \approx V_2 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_2 = H = \Delta h$$

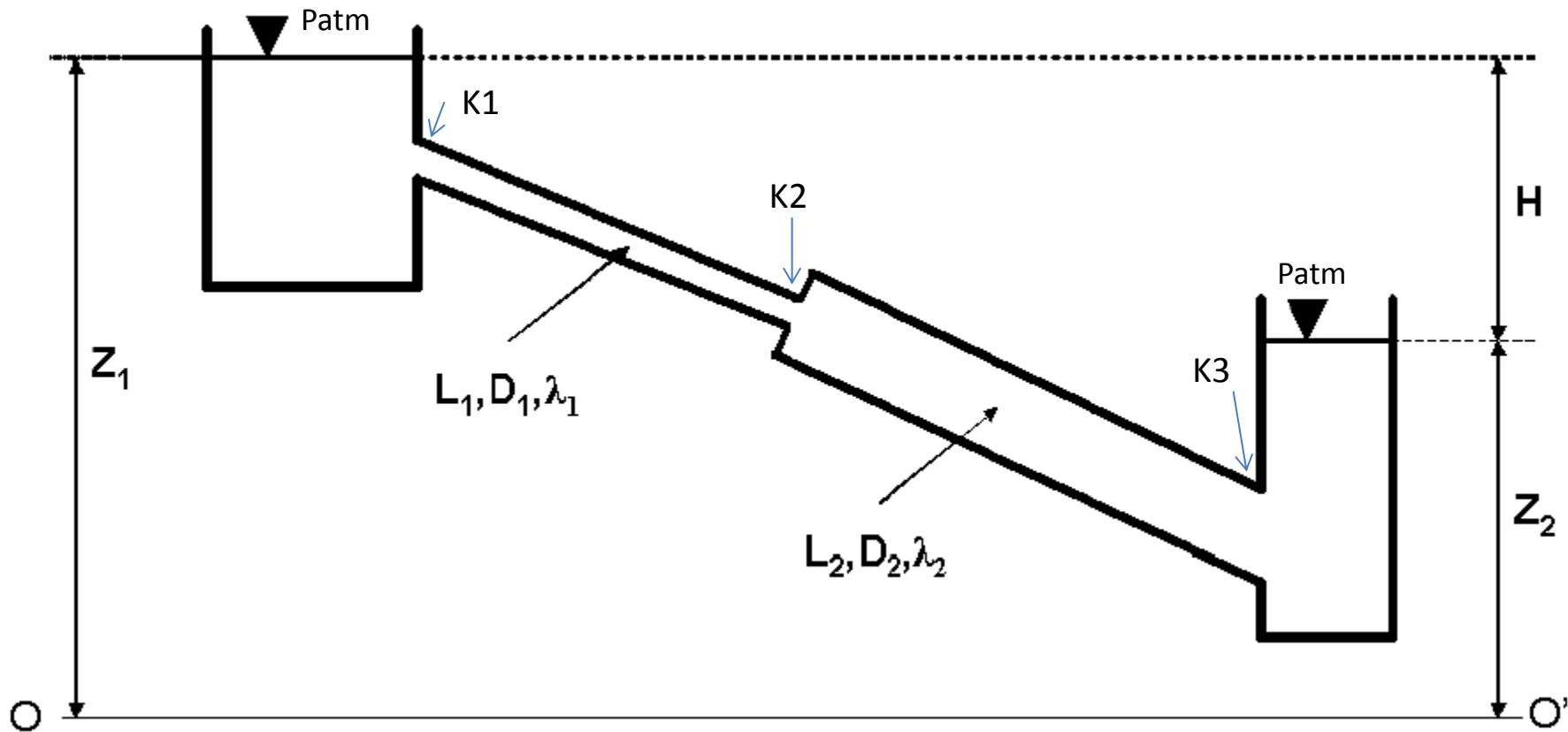
$$H = \Delta h = \lambda \frac{LV^2}{2gD} + k_1 \frac{V^2}{2g} + k_2 \frac{V^2}{2g} = \left[\lambda \frac{L}{D} + k_1 + k_2 \right] \frac{V^2}{2g}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{D} + k_1 + k_2}} \sqrt{2gH}$$

$$ou : Q = \frac{\pi D^2}{\sqrt[4]{\lambda \frac{L}{D} + k_1 + k_2}} \sqrt{2gH}$$

□ Conduite à section variable (conduites multiples)

a- Branchement en Série



Equation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

$$p_1 = p_2 = p_{atm} ; V_1 \approx V_2 \approx 0 \Rightarrow z_1 - z_2 = H = \Delta h$$

$$H = \Delta h = \Delta h_{l1} + \Delta h_{l2} + \Delta h_{s1} + \Delta h_{s2} +_{s3}$$

$$= \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1} + \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{2gD_2} + k_1 \frac{V_1^2}{2g} + k_2 \frac{V_1^2}{2g} + k_3 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{or: } V_2 = \frac{S_1}{S_2} V_1$$

$$\Rightarrow H = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{2gD_1} + \lambda_2 \frac{L_2 V_1^2}{2gD_2} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 + k_1 \frac{V_1^2}{2g} + k_2 \frac{V_1^2}{2g} + k_3 \frac{V_1^2}{2g} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2$$

$$= \frac{V_1^2}{2g} \left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 + k_1 + k_2 + k_3 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]$$

$$d'où : V_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 + k_1 + k_2 + k_3 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]}} \sqrt{2gH}$$

$$d'o\grave{u} : Q = \frac{\pi D_1^2}{4 \sqrt{\left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 + k_1 + k_2 + k_3 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 \right]}} \sqrt{2gH}$$

$$\Delta h = H = k_1 Q_1^2 L_1 + k_2 Q_2^2 L_2$$

$$comme : Q_1 = Q_2 = Q$$

$$donc : H = Q^2 [k_1 L_1 + k_2 L_2]$$

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{(k_1 L_1 + k_2 L_2)}}$$

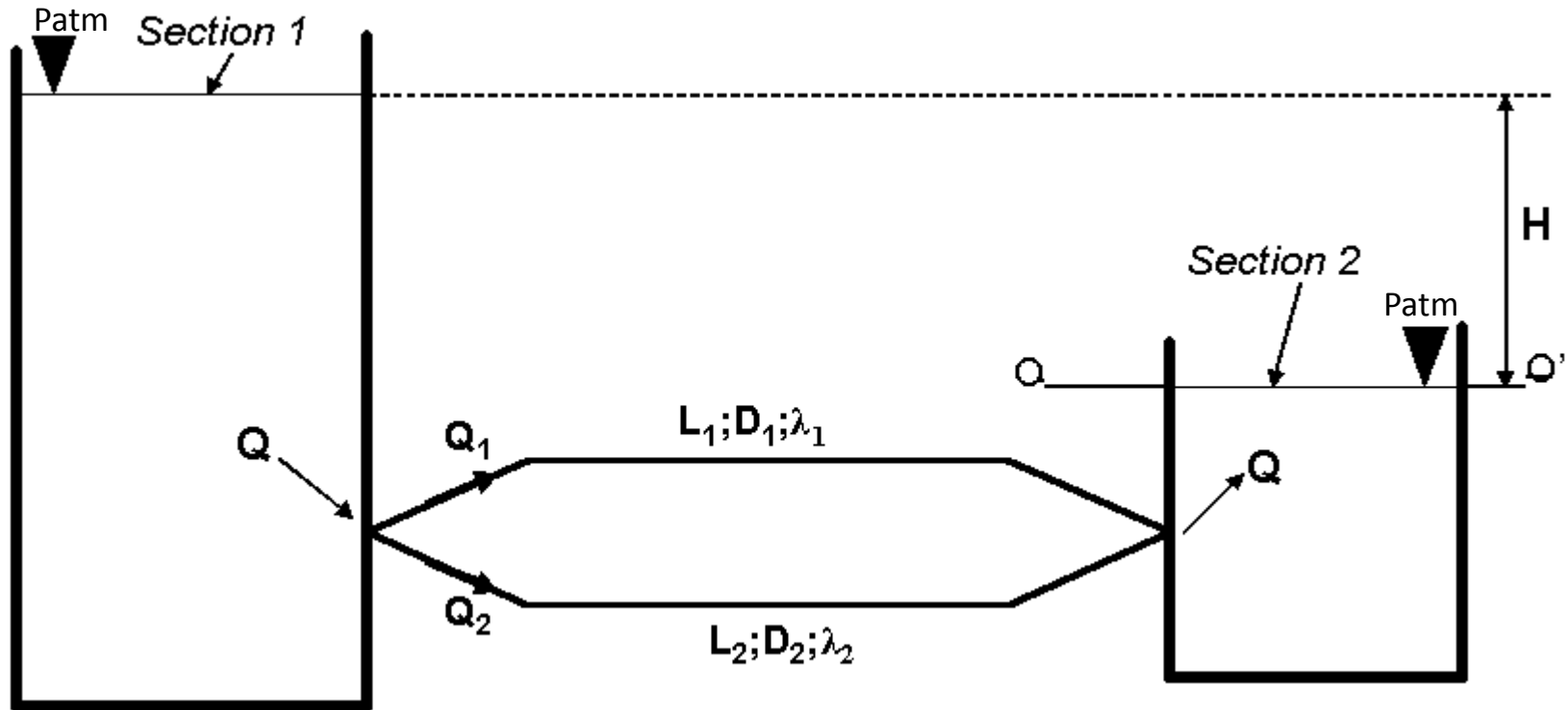
Conclusion : Cas de *n* conduites placées en série :

- Les pertes de charge s'ajoutent : $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots \Delta h_n$
- Les débits sont égaux : $Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$

Et la formule générale de calcul s'écrit :

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\sum_1^n K_i L_i}}$$

b- Branchement en Parallèle :



Equation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

Dans le cas d'un branchement en parallèle :

- Les pertes de charges sont égales : $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$
- Les débits s'ajoutent : $Q = Q_1 + Q_2$

$$\Delta h_1 = k_1 Q_1^2 L_1 \quad \Rightarrow \quad Q_1 = k_1 \sqrt{\frac{\Delta h_1}{L_1}}$$

$$\Delta h_2 = k_2 Q_2^2 L_2 \quad \Rightarrow \quad Q_2 = k_2 \sqrt{\frac{\Delta h_2}{L_2}}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = k_1 \sqrt{\frac{\Delta h_1}{L_1}} + k_2 \sqrt{\frac{\Delta h_2}{L_2}}$$

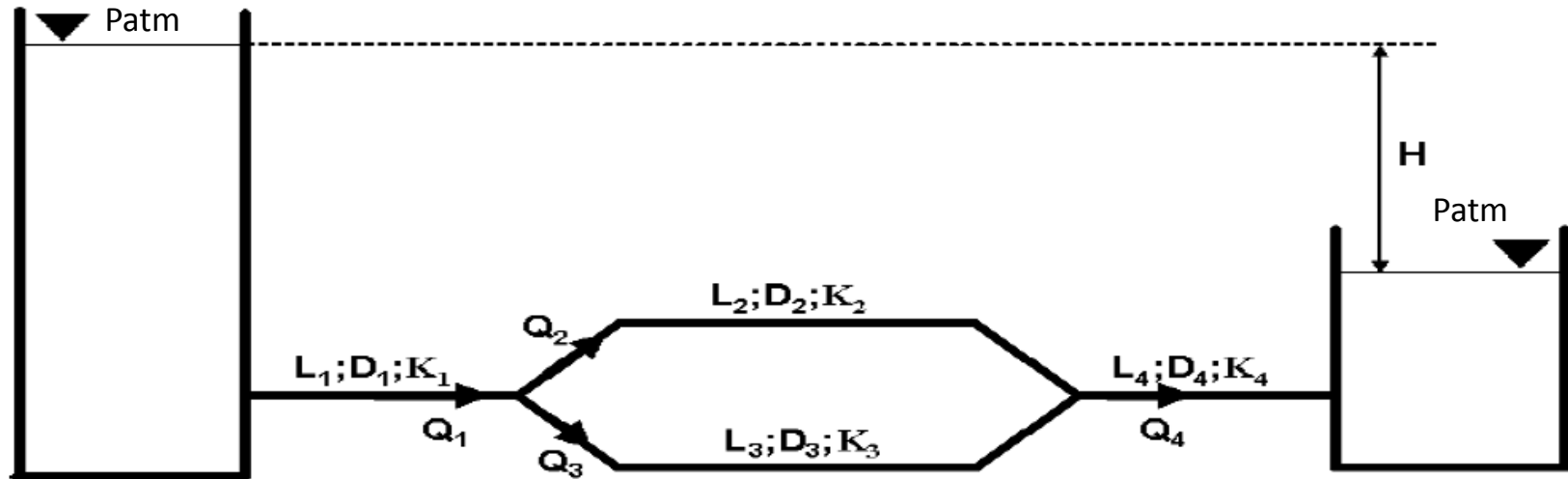
et comme $\Delta h_1 = \Delta h_2 = H$

$$\text{donc : } Q = \left[\frac{k_1}{\sqrt{L_1}} + \frac{k_2}{\sqrt{L_2}} \right] \sqrt{H}$$

et d'une manière générale :

$$Q = \sqrt{H} \sum_1^n \frac{k_i}{\sqrt{L_i}}$$

c- Branchement Mixte (Série et Parallèle)



$$Q = Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_4$$

$$\Delta h_{l2} = \Delta h_{l3}$$

$$\Delta h = \Delta h_{l1} + \Delta h_{l2} + \Delta h_{l4}$$

$$H = \Delta h$$

$$\Delta h_{l1} = k_1 Q_1^2 L_1 \quad ; \quad \Delta h_{l2} = k_2 Q_2^2 L_2 \quad ; \quad \Delta h_{l3} = k_3 Q_3^2 L_3 \quad ; \quad \Delta h_{l4} = k_4 Q_4^2 L_4$$

Comme $Q = Q_1 = Q_4$ alors : $\Delta h_{11} = k_1 Q^2 L_1$; $\Delta h_{14} = k_4 Q^2 L_4$

et comme : $Q = Q_2 + Q_3$ alors : $Q = \sqrt{\frac{\Delta h_{12}}{k_2 L_2}} + \sqrt{\frac{\Delta h_{13}}{k_3 L_3}} = \sqrt{\Delta h_{12}} \left[\frac{1}{\sqrt{k_2 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3 L_3}} \right]$

$$\Delta h_{12} = \frac{Q^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{k_2 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3 L_3}} \right]^2}$$

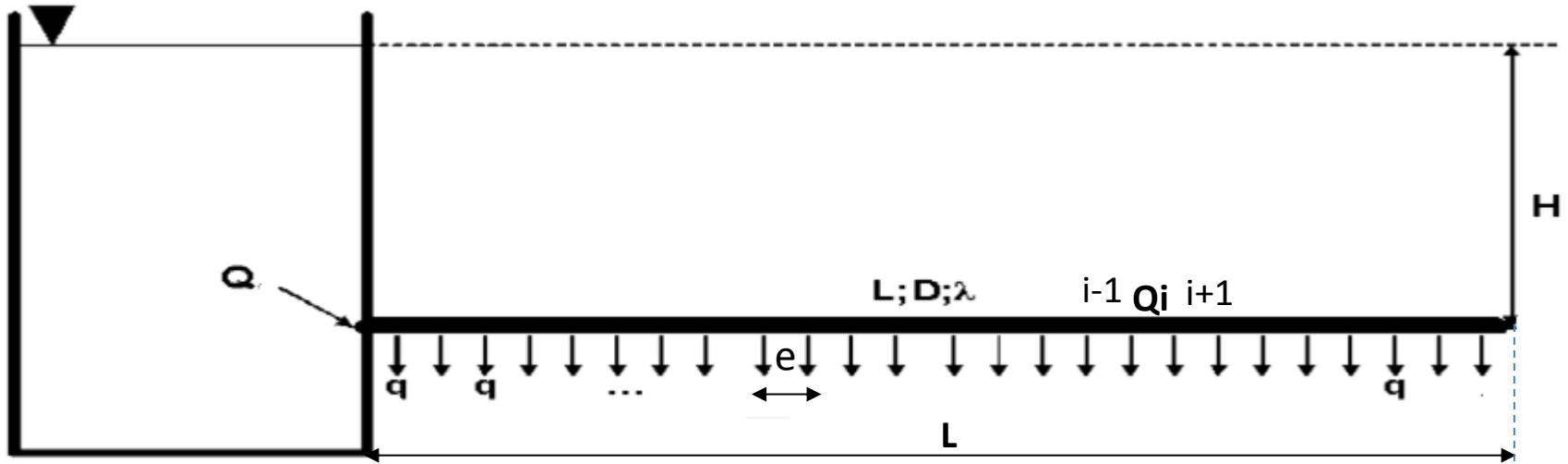
et finalement , puisque : $H = \Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_4$

$$H = k_1 Q^2 L_1 + \frac{Q^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{k_2 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3 L_3}} \right]^2} + k_4 Q^2 L_4 = Q^2 \left[k_1 L_1 + k_4 L_4 + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{k_2 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3 L_3}} \right]^2} \right]$$

et donc :

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{k_1 Q^2 L_1 + k_4 Q^2 L_4 + \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{k_2 L_2}} + \frac{1}{\sqrt{k_3 L_3}} \right]^2}}}$$

d- Conduite assurant un service de route :



i : nombre de tronçons; e : écartement entre 2 sorties D : diamètre de la conduite L : longueur de conduite
 q : débit de sortie uniforme

$$\Delta h = \sum_1^N \Delta h_i = k q^2 e \sum_1^N i^2 = \frac{Nke(Nq)^2}{NN^2} \sum_1^N i^2$$

$$L = Ne$$

$$\Rightarrow \Delta h = kQ^2 L \frac{\sum_1^N i^2}{N^3} = j^* L^* F$$

F : coefficient de réduction de la perte de charge totale s'il n'y avait pas de service en route

*Coefficients de réduction F à utiliser
suivant le nombre de sorties N.*

Formule de pertes de charge utilisée:

Darcy-Weisbach

$$F = \frac{\sum_{i=1}^N i^2}{N^3}$$

Nombre de sorties	Darcy-weisbach
1	1
2	0,625
3	0,518
4	0,469
5	0,440
6	0,421
7	0,408
8	0,398
9	0,391
10	0,385
11	0,380
12	0,376
13	0,373
14	0,370
15	0,367
16	0,365
17	0,363
18	0,361
19	0,360
20	0,359
22	0,357
24	0,355
26	0,353
28	0,351
30	0,350
35	0,347
40	0,345

e- Conduites assurant un branchement de réservoirs multiples:

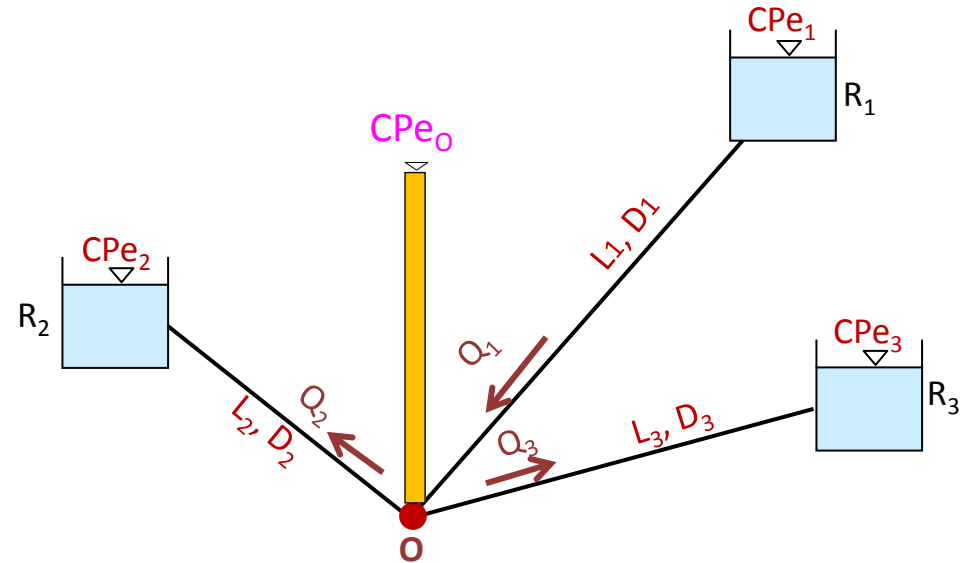
- Formule de Hazen-Williams:

$$j_{(m/m)} = 10,675 * \left(\frac{Q_{(m^3/s)}}{C_{HW}} \right)^{1,852} * \frac{1}{D_{(m)}^{4,872}}$$

$$Q = j^{0,54} \left[\frac{C_{HW}^{1,852} * D^{4,872}}{10,67} \right]^{0,54}$$

$$= j^{0,54} \left[0,094 * C_{HW}^{1,852} * D^{4,872} \right]^{0,54}$$

$$= j^{0,54} K^{0,54}$$



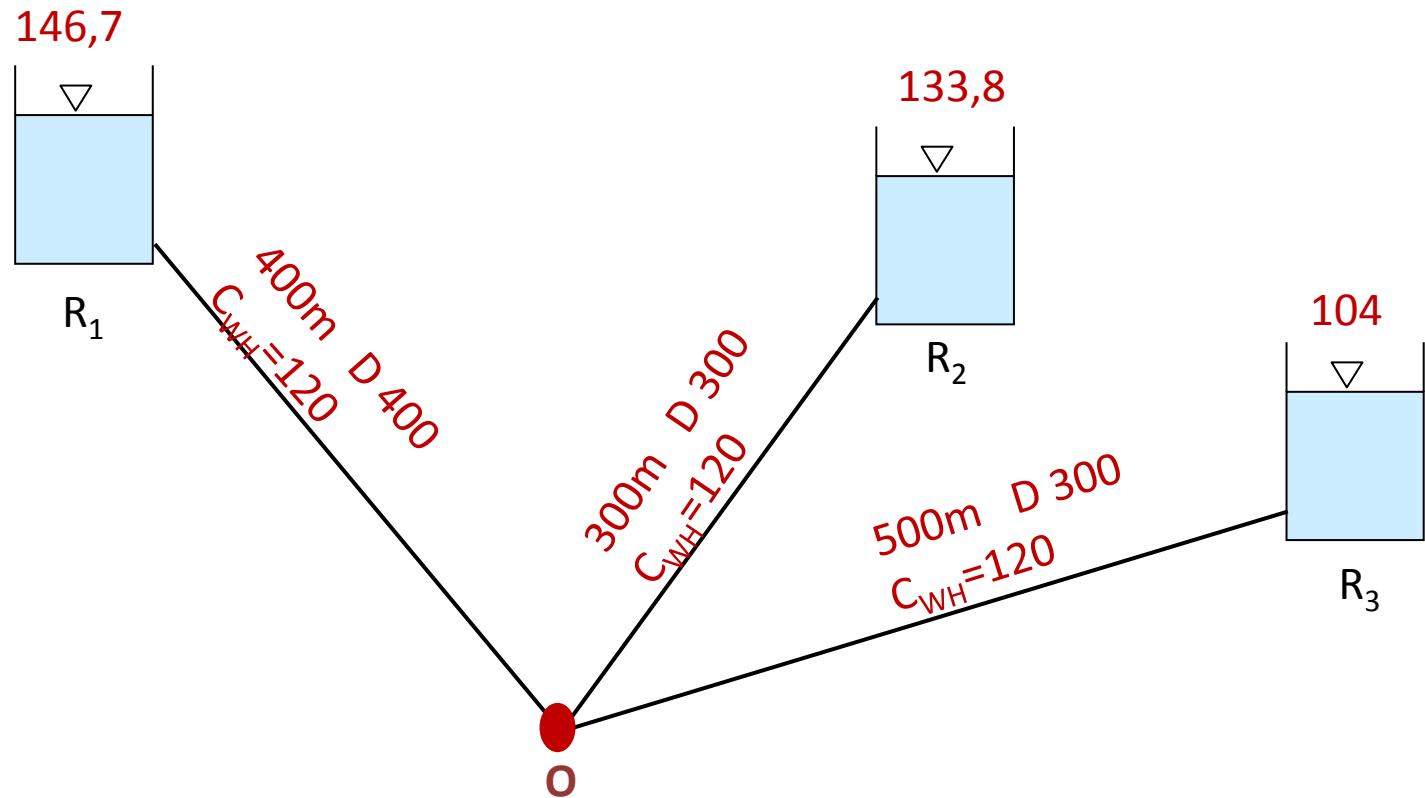
	CPe	CPe.supposée	Δh	L	j	$j^{0,54}$	CHW	D	K	$K^{0,54}$	Qi
R1	CPe1	CPeO	$ C_{Pe1} - C_{PeO} $	L1	$\Delta h/L1$	$j^{0,54}$	CHW1	D1	K1	$K1^{0,54}$	Q1
R2	CPe2		$ C_{Pe2} - C_{PeO} $	L2	$\Delta h/L2$	$j^{0,54}$	CHW2	D2	K2	$K2^{0,54}$	Q2
R3	CPe3		$ C_{Pe3} - C_{PeO} $	L3	$\Delta h/L3$	$j^{0,54}$	CHW3	D3	K3	$K3^{0,54}$	Q3

si $-10^{-3} \leq Q_1 - (Q_2 + Q_3) \leq +10^{-3}$ on retient :

sinon on suppose de nouveau :

Exemple:

Déterminons les débits dans les conduites de l'installation hydraulique ci-contre ?



Solution:

- ✓ Etablir un tableau de calcul des débits.
- ✓ Vérifier l'équation de la continuité en adoptant une précision appropriée ($\pm 10^{-3}$)

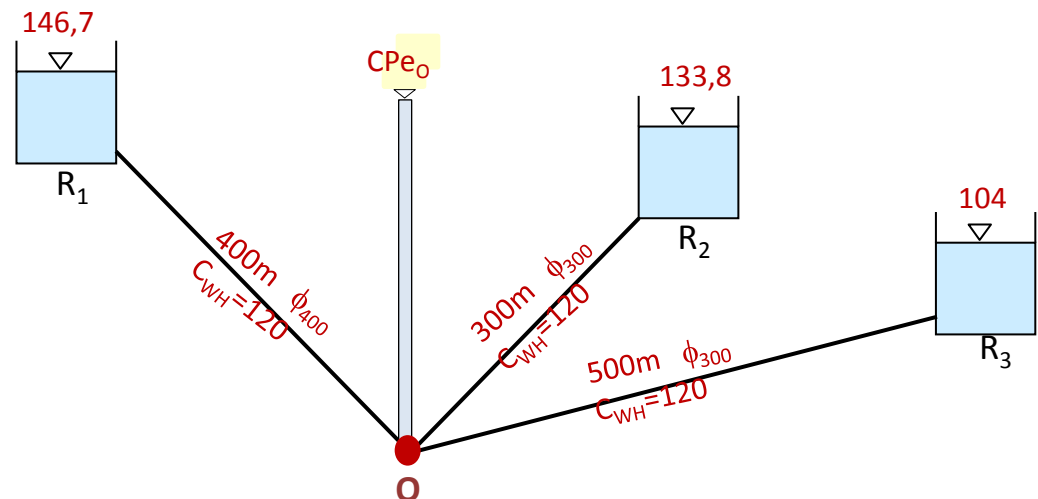
	C _{Pe}	C _{PeO} supposée	Δh (m)	L (m)	j (m/m)	$j^{0,54}$	CHW	D (m)	K	$K^{0,54}$	Q _i (m ³ /s)
R1	146,7	136,15	10,55	400	0,026	0,14	120	0,4	7,69	3,008	0,422
R2	133,8		2,35	300	0,008	0,073	120	0,3	1,89	1,412	0,103
R3	104		32,15	500	0,064	0,227	120	0,3	1,89	1,412	0,321

$Q_1 - (Q_2 + Q_3)$	-0,001
---------------------	---------------

Vérification:

$$-10^{-3} \leq Q_1 - (Q_2 + Q_3) \leq 10^{-3}$$

$$Q_1 - (Q_2 + Q_3) = 0,422 - (0,103 + 0,321) \\ = -0,001$$

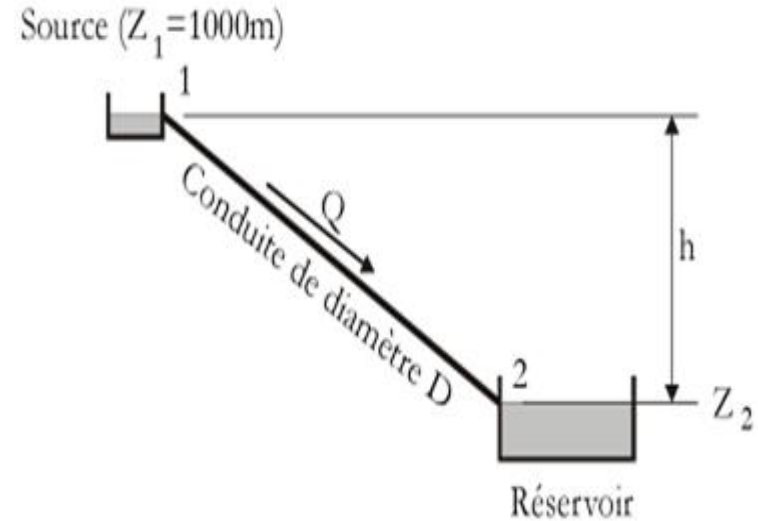


f- Particularité de l'équation de Darcy:

a) Un ingénieur a identifié une bonne source d'eau située à une cote **$Z_1=1000$ m**. Il peut faire écouler cette eau d'une manière gravitaire pour remplir un réservoir de stockage.

Supposons que le débit de la source soit limité à une valeur **$Q=1$ m³/s**. Le diamètre de la canalisation de branchement de **1 km** de longueur a été fixé à **0,6 m**. Le matériau de la conduite est la fonte (rugosité relative $k=0,06$ m).

En négligeant les pertes de charge singulières, à quelle cote Z_2 placer le réservoir de stockage ? $\nu = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$



$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta h$$

$$P_1 = P_2 \text{ et } V_1 = V_2 \approx 0$$

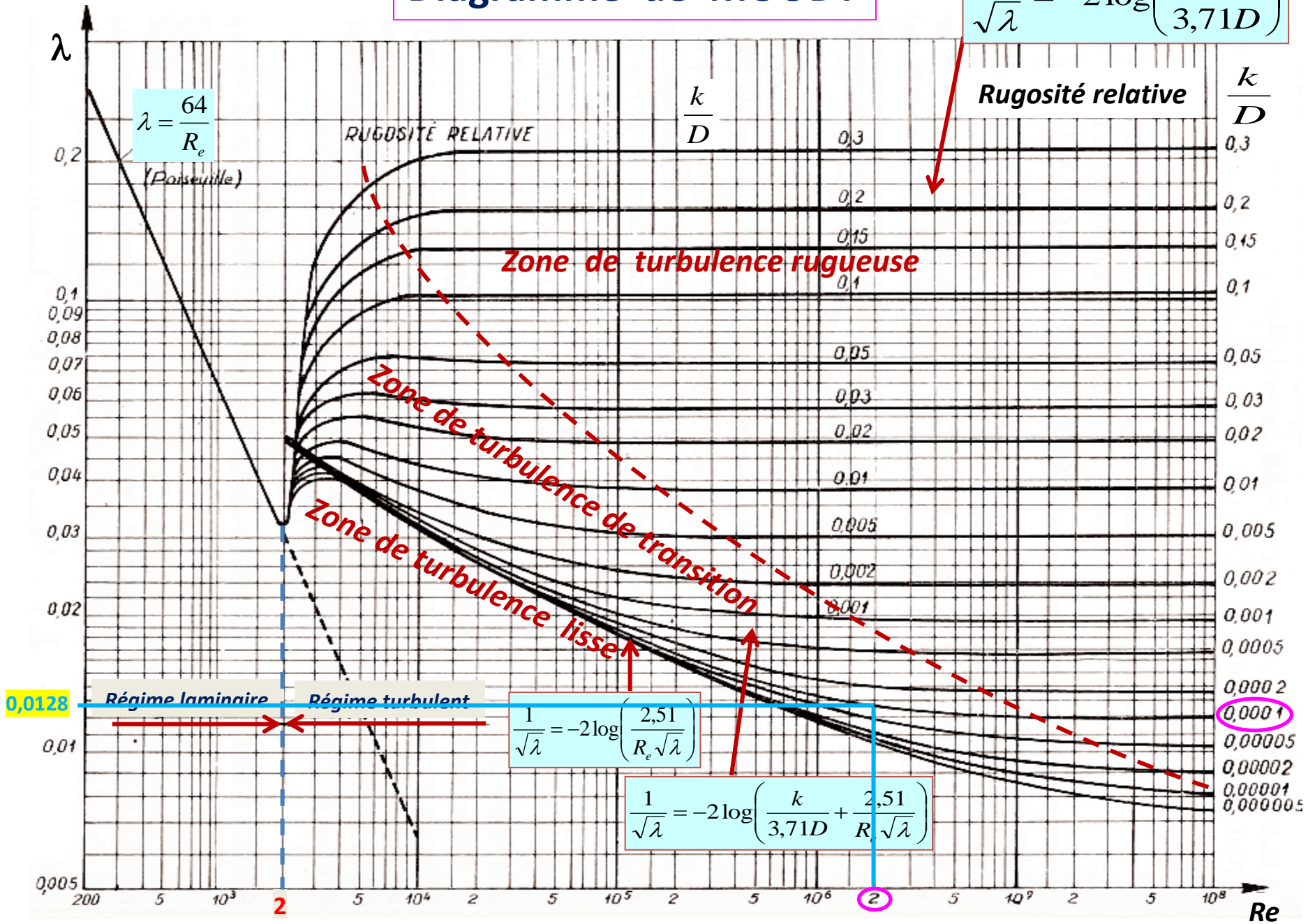
$$\Rightarrow z_2 = z_1 - \Delta h = z_1 - \lambda \frac{V^2 L}{2gD} = z_1 - 0,0827 \lambda \frac{Q^2 L}{D^5}$$

$$\lambda : f\left(\frac{k}{D}; \underbrace{\text{Re}}_{\frac{4Q}{\pi D \nu}}\right) = f(10^{-4}; 1,86 \cdot 10^6)$$

Diagramme de Moody $\Rightarrow \lambda = 0,0128$; d'où : $z_2 = 986,38 \text{ m}$

Diagramme de MOODY

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71D} \right)$$



b) On traite le même problème que précédemment sauf qu'on suppose maintenant que la cote $Z_2=986,38$ m est connue. Les autres paramètres étant inchangés, on demande de calculer le diamètre de la conduite qui devient l'inconnue du problème ?

$$z_1 - z_2 = \Delta h = 0,0827 \lambda \frac{Q^2 L}{D^5}$$

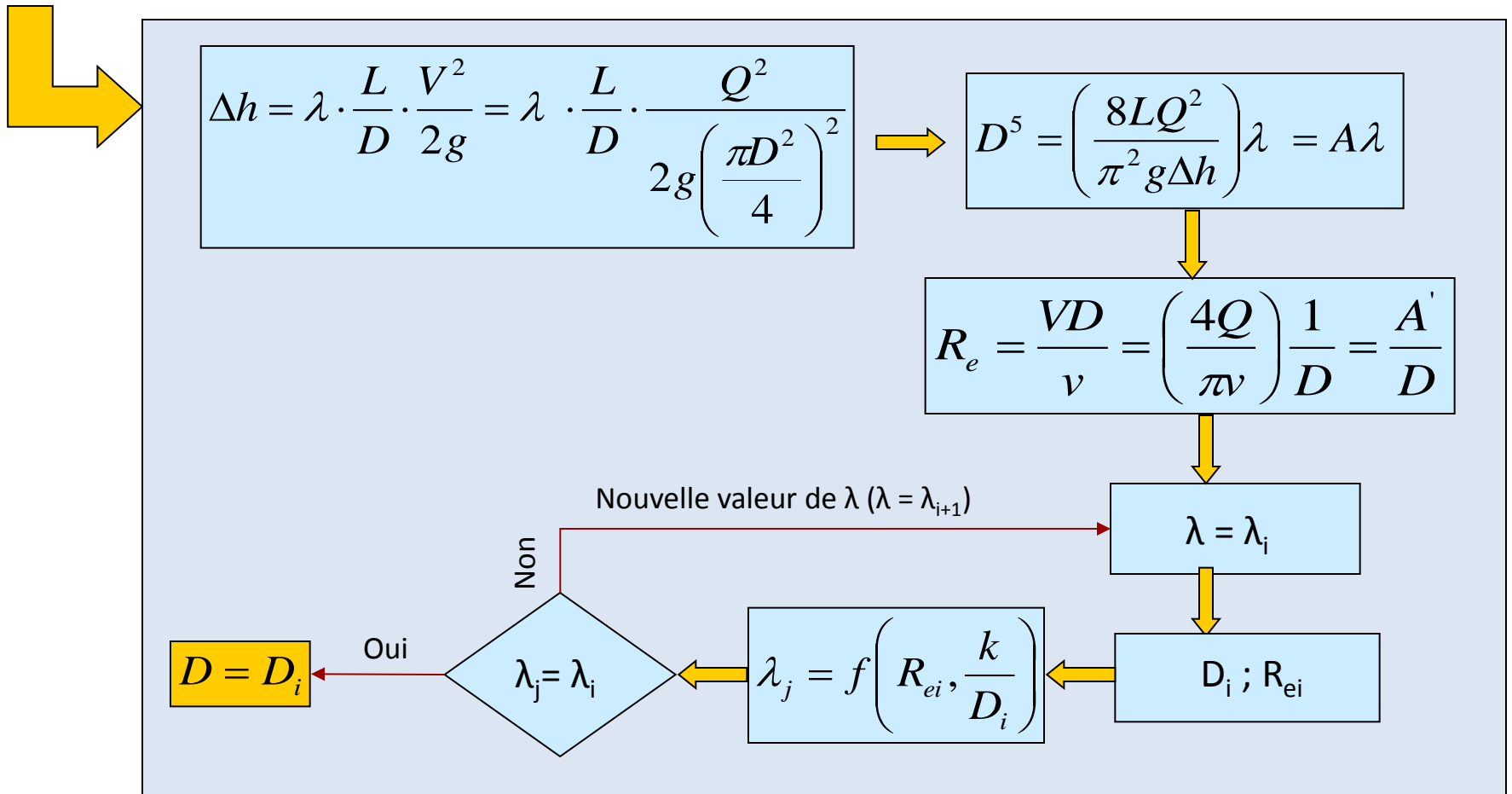
$$\lambda: f\left(\frac{k}{D}; \underbrace{\text{Re}}_{4Q/\pi D \nu}\right) = f\left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{D}; \frac{1,11 \cdot 10^6}{D}\right)$$

C'est une formule qui n'est pas explicite pour calculer le diamètre, d'où on doit recourir aux calculs itératifs

DETERMINATION DU DIAMETRE

✓ Problème : 2 inconnues → le coefficient de perte de charge linéaire λ et le diamètre D .

✓ Etapas de solution



$$\Delta h = \lambda \frac{V^2 L}{2gD} = \frac{\lambda 8Q^2 L}{\pi^2 g D^5}$$

$$\Rightarrow D^5 = \left(\frac{8LQ^2}{\pi^2 g \Delta h} \right) \lambda = A\lambda = \left(\frac{8 * 1000 * 1^2}{\pi^2 * 9,81 * 13,62} \right) \lambda \quad d'ou\grave{a}: \quad D^5 = 6,07\lambda$$

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \left(\frac{4Q}{\pi \nu} \right) \frac{1}{D} = \frac{A'}{D} = \left(\frac{4 * 1}{\pi * 1,14 * 10^{-6}} \right) \frac{1}{D} \quad d'ou\grave{a}: \quad R_e = \frac{1.117.443,3}{D}$$

λ	D^5	D(m)	Re
0,03	0,1821	0,711	1570954,14
0,01	0,0607	0,571	1956986,18
0,0128	0,0777	0,600	1862712,22
0,013	0,0789	0,602	1856945,20

c) On suppose cette fois que les altitudes de la source et du réservoir du problème précédent sont imposées et que le diamètre de la conduite a été fixé a priori. Le seul inconnu du problème est maintenant le **débit** d'écoulement.

$$z_1 - z_2 = \Delta h = 0,0827 \lambda \frac{Q^2 L}{0,6^5}$$

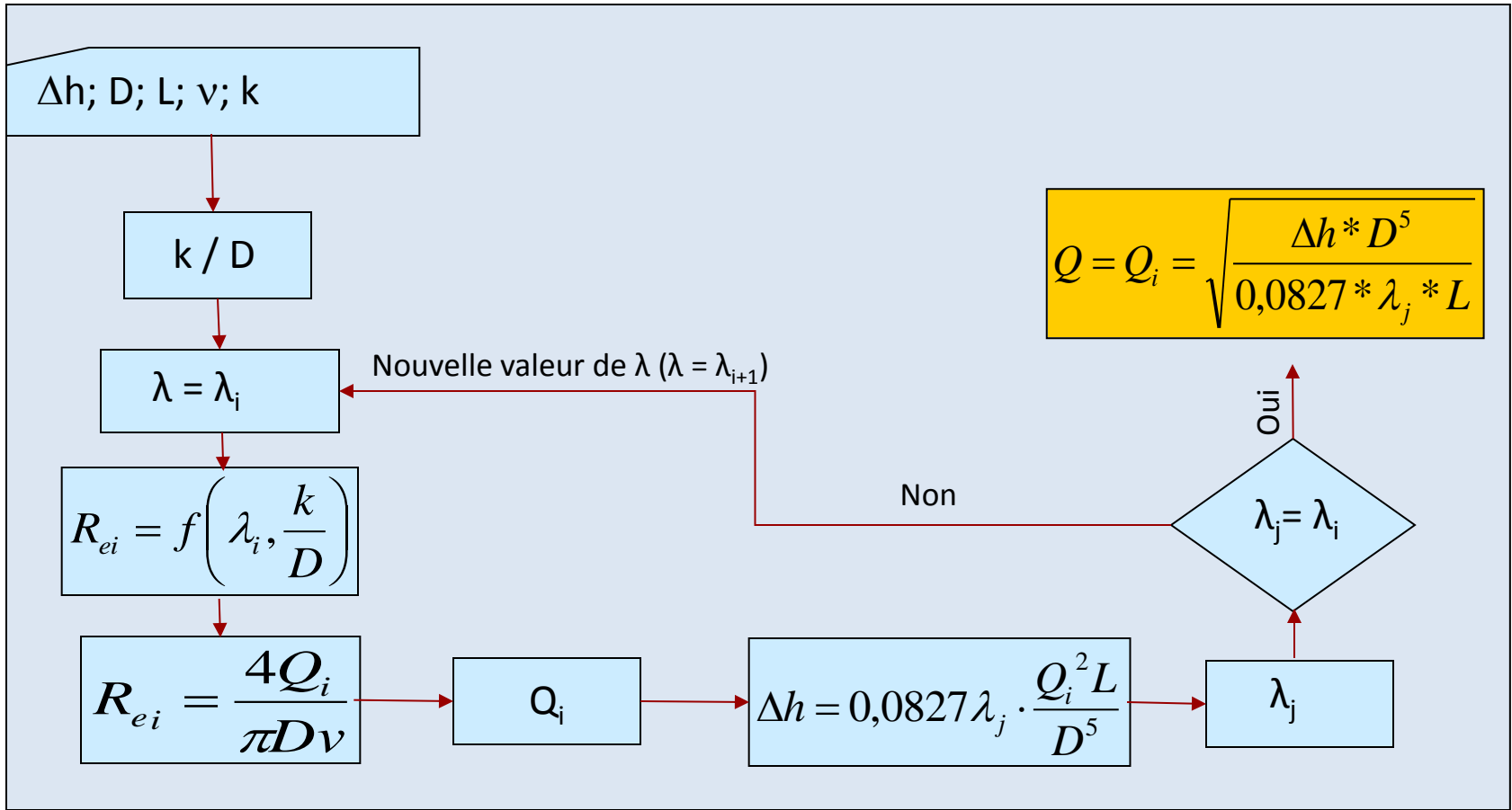
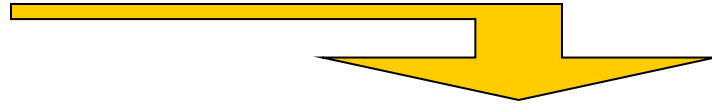
$$\lambda : f\left(\frac{k}{D}; \underbrace{\text{Re}}_{4Q/\pi D \nu}\right) = f\left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{0,6}; 1,86 \cdot 10^6 Q\right)$$

C'est une formule qui n'est pas explicite pour calculer le débit, d'où on doit recourir aux calculs itératifs

DETERMINATION DU DEBIT

✓ Problème : La débit Q et le coefficient de perte de charge linéaire λ sont inconnus.

✓ Etapas de solution



Reprenons les mêmes problèmes que ceux vus précédemment en utilisant cette fois la formule de **Hazen-Williams** . La constante CHW= 140 pour la fonte.

$$z_2 = z_1 - \Delta h = z_1 - 10,67 * \left(\frac{Q}{C} \right)^{1,852} * \frac{L}{D^{4,872}} =$$

$$= 1000 - 10,67 * 1000 * \left(\frac{1}{140} \right)^{1,852} * \frac{1000}{0,6^{4,872}} = 986,38 m$$

$$z_1 - z_2 = \Delta h = 10,675 * \left(\frac{Q}{C} \right)^{1,852} * \frac{L}{D^{4,872}}$$

$$\Rightarrow D = \left[\frac{10,675L \left(\frac{Q}{C_{H.W}} \right)^{1,852}}{z_1 - z_2} \right]^{1/4,87} = \left[\frac{10,675 * 1000 \left(\frac{1}{140} \right)^{1,852}}{13,62} \right]^{1/4,87} = 0,6 m$$

$$z_1 - z_2 = \Delta h = 10,675 * \left(\frac{Q}{C} \right)^{1,852} * \frac{L}{D^{4,872}}$$

$$\Rightarrow Q = \left[\frac{(z_1 - z_2) D^{4,87}}{10,675L} \right]^{1/1,852} = \left[\frac{13,62 * 0,6^{4,87}}{10,675 * 1000} \right]^{1/1,852} = 1 m^3 / s$$

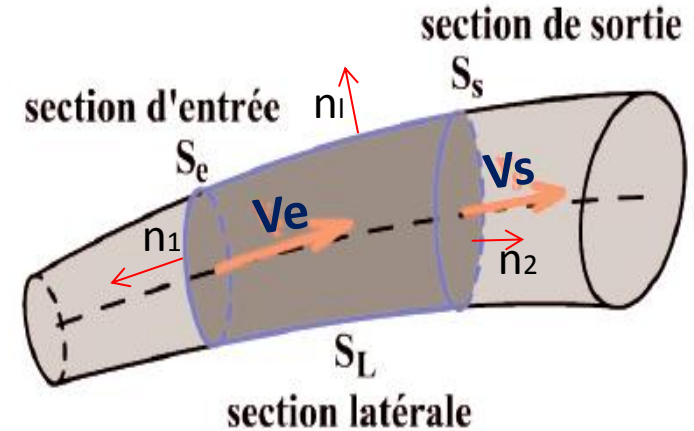
XI- THEOREME D'EULER

Il permet de comprendre pourquoi un **tuyau souple** par exemple se met à **se tortiller** lorsqu'on ouvre le robinet, ou encore d'avoir une idée des forces que subissent les canalisations lors du passage d'un fluide.

Théorème de quantité de mouvement appliqué au volume de fluide isolé compris entre les sections d'entrée (S_e), de sortie (S_s) et latérale (S_L)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \int_m m \frac{d\vec{V}}{dt} = \int_V \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dV = \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

- \vec{n} : normale unitaire aux surfaces extérieures
- \vec{V} : vitesse d'écoulement dans la section considérée
- ρ : masse volumique du liquide
- $\sum \vec{F}_{ext}$: somme des forces extérieures



$$\iint_{S_e} \rho \vec{V}_e (\vec{V}_e \cdot \vec{n}_1) ds + \iint_{S_s} \rho \vec{V}_s (\vec{V}_s \cdot \vec{n}_2) ds + \iint_{S_L} \rho \vec{V}_L (\vec{V}_L \cdot \vec{n}_L) ds = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_e} \rho \vec{V}_e (-V_e) ds + \iint_{S_s} \rho \vec{V}_s (V_s) ds + 0 = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = -\rho V_e \vec{V}_e \iint_{S_e} ds + \rho V_s \vec{V}_s \iint_{S_s} ds = -\rho V_e S_e \vec{V}_e + \rho V_s S_s \vec{V}_s = \rho Q_v (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

Théorème d'Euler en régime permanent

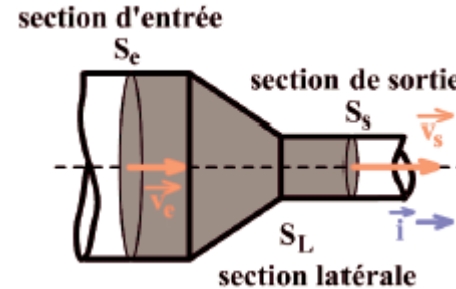
Exemple:

α - Convergent progressif:

Déterminons la force exercée par le fluide sur la canalisation $\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}$?

Forces exercées sur le système:

- ✓ Poids ;
- ✓ forces de pression sur les sections S_e et S_s ;
- ✓ force exercée par la canalisation sur le fluide = $-\overrightarrow{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}$



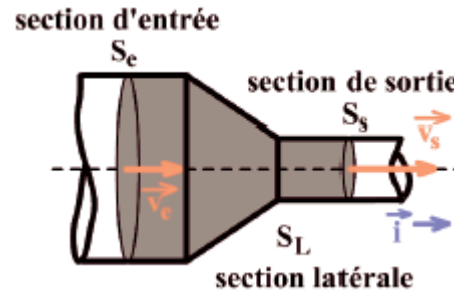
$$\sum \vec{F}_{ext} = Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

$$\Rightarrow Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) = \vec{P} + \overrightarrow{F}_{pr.Se} + \overrightarrow{F}_{pr.Ss} + \overrightarrow{F}_{canalis \rightarrow fluide}$$

En négligeant le poids de l'eau :

$$Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) = \overrightarrow{F}_{pr.Se} + \overrightarrow{F}_{pr.Ss} + \overrightarrow{F}_{canalis \rightarrow fluide}$$

Projetons sur un axe (O, \vec{i})



$$\overrightarrow{F_{pr.Se}} = p_e S_e \vec{i} \quad ; \quad \overrightarrow{F_{pr.Ss}} = -p_s S_s \vec{i} \quad ; \quad \vec{V}_e = V_e \vec{i} \quad ; \quad \vec{V}_s = V_s \vec{i}$$

D'où:

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_{canalis \rightarrow fluide}} = \left[Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) + p_s S_s - p_e S_e \right] \vec{i}$$

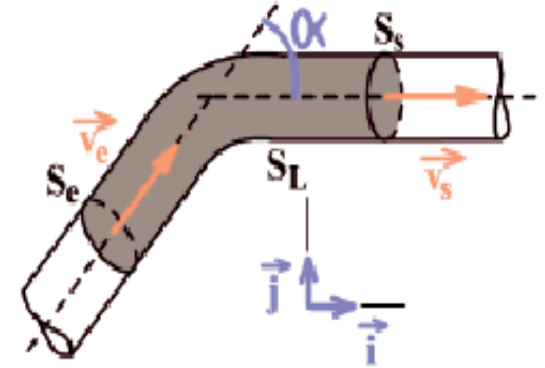
$$\Rightarrow \overrightarrow{F_{fluide \rightarrow canalis}} = - \left[Q_m (\vec{V}_s - \vec{V}_e) + p_s S_s - p_e S_e \right] \vec{i}$$

b- Coude:

Déterminons la force exercée par le fluide sur la canalisation $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalisation}}$?

Le poids de l'eau est négligeable

La section d'entrée est identique à la section de sortie $S_e = S_s$.



Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$\vec{F}_{pr.S_e} \begin{vmatrix} p_e S \cos \alpha \\ p_e S \sin \alpha \end{vmatrix} ; \vec{F}_{pr.S_s} \begin{vmatrix} -p_s S \\ 0 \end{vmatrix} ; \vec{F}_{canalis. \rightarrow fluide} \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{V}_e \begin{vmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{vmatrix} ; \vec{V}_s \begin{vmatrix} v \\ 0 \end{vmatrix} ; Q_m = \rho S V$$

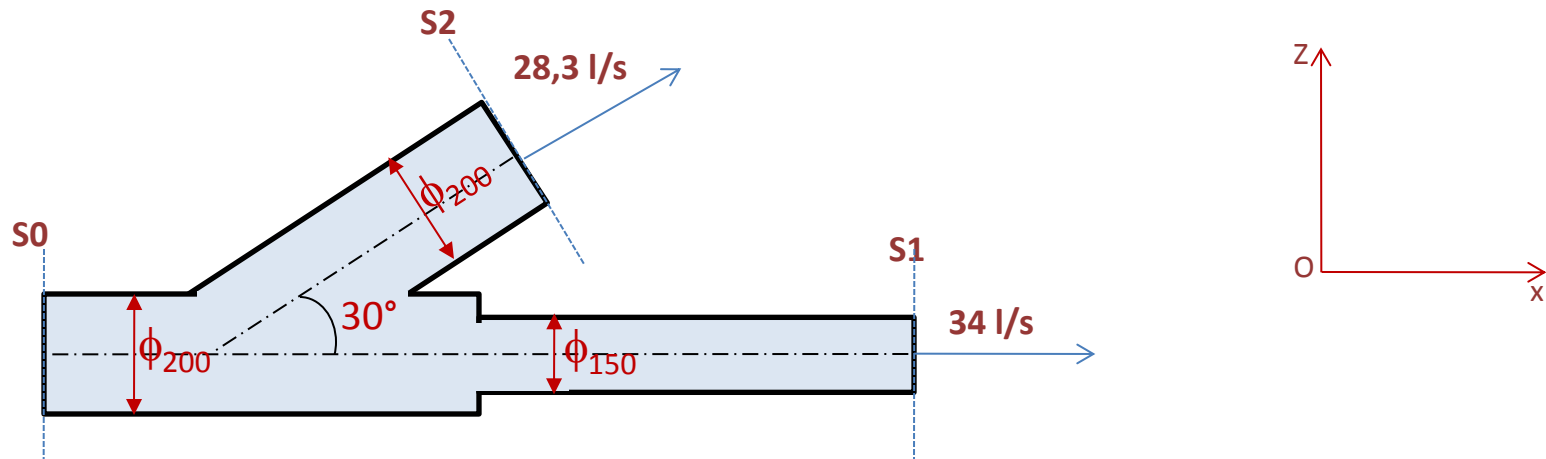
Ce qui donne:

$$\begin{cases} F_x = (\rho V^2 + p) S (1 - \cos \alpha) \\ F_y = -(\rho V^2 + p) S \sin \alpha \end{cases}$$

On en déduit:

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{canalis.}} \begin{vmatrix} (\cos \alpha - 1) S (\rho V^2 + p) \\ \sin \alpha S (p + \rho V^2) \end{vmatrix}$$

b- Té oblique:

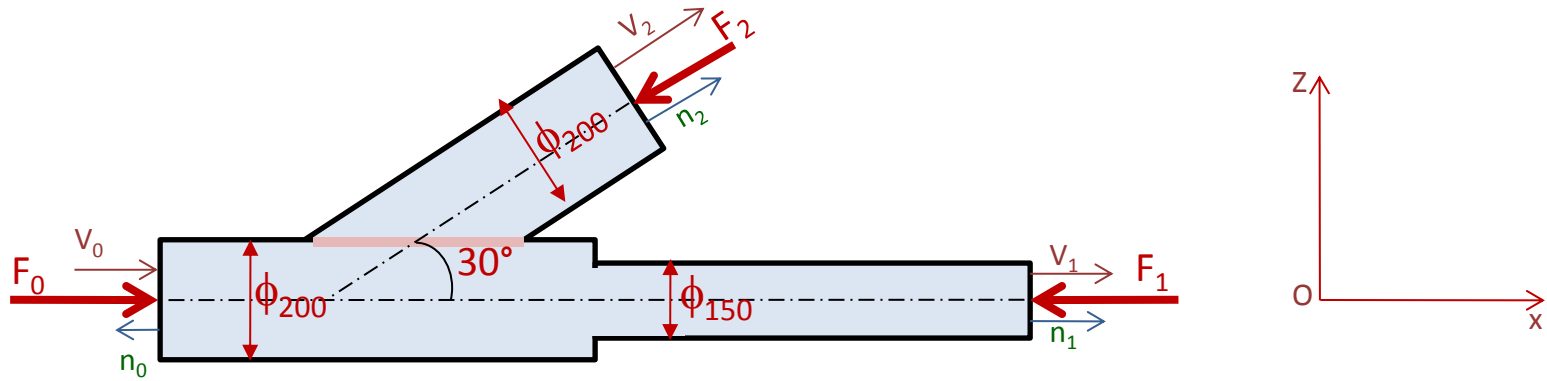


Déterminer les caractéristiques de l'action de l'eau sur le Té.

On donne :

$$P_0 = 1092,6 \text{ kPa} \quad ; \quad P_1 = 1092,7 \text{ kPa} \quad ; \quad P_2 = 1089,4 \text{ kPa}$$

On néglige le poids de l'eau dans l'élément de volume



Evaluons d'abord le terme intégral de la quantité de mouvement :

$$\iint_{S_0} \rho \vec{V}_0 (\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_0) ds + \iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1) ds + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2) ds + \iint_{S_L} \rho \vec{V}_L (\vec{V}_L \cdot \vec{n}_L) ds = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_0} \rho \vec{V}_0 (-V_0) ds + \iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 (V_1) ds + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 (V_2) ds + 0 = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = -\rho V_0 \vec{V}_0 \iint_{S_0} ds + \rho V_1 \vec{V}_1 \iint_{S_1} ds + \rho V_2 \vec{V}_2 \iint_{S_2} ds = -\rho V_0 S_0 \vec{V}_0 + \rho V_1 S_1 \vec{V}_1 + \rho V_2 S_2 \vec{V}_2$$

Evaluons les forces extérieures :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{M\vec{g}}_{\text{Poids du liquide}} + \underbrace{\vec{F}_0}_{\text{Forcedepression sur } S_0} + \underbrace{\vec{F}_1}_{\text{Forcedepression sur } S_1} + \underbrace{\vec{F}_2}_{\text{Forcedepression sur } S_2} + \underbrace{(-\vec{R})}_{\text{Action du coude sur le fluide}}$$

$$\Rightarrow -\rho V_0 S_0 \vec{V}_0 + \rho V_1 S_1 \vec{V}_1 + \rho V_2 S_2 \vec{V}_2 = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{R}$$

$$\Rightarrow -\rho Q_0 \vec{V}_0 + \rho Q_1 \vec{V}_1 + \rho Q_2 \vec{V}_2 = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{R}$$

Projection sur l'axe Ox :

$$-\rho Q_0 V_0 + \rho Q_1 V_1 + \rho Q_2 V_2 \cos 30^\circ = F_0 - F_1 - F_2 \cos 30^\circ - \bar{R}_x$$

$$\Rightarrow \bar{R}_x = F_0 - F_1 - F_2 \cos 30^\circ + \rho Q_0 V_0 - \rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2 \cos 30^\circ$$

Projection sur l'axe Oz :

$$0 + 0 + \rho Q_2 V_2 \sin 30^\circ = 0 - 0 - F_2 \sin 30^\circ - \bar{R}_z$$

$$\Rightarrow \bar{R}_z = -F_2 \sin 30^\circ - \rho Q_2 V_2 \sin 30^\circ$$

$$V_0 = \frac{4Q_0}{\pi D_0^2} = \frac{4 \times (34 + 28,3) \times 10^{-3}}{3,14 \times 0,2^2} = 1,98 \text{ m/s}$$

$$F_0 = P_0 \times S_0 = 1092,6 \times 10^3 \times \frac{3,14 \times 0,2^2}{4} = 34308 \text{ N}$$

$$V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 34 \times 10^{-3}}{3,14 \times 0,15^2} = 1,92 \text{ m/s}$$

$$F_1 = P_1 \times S_1 = 1092,7 \times 10^3 \times \frac{3,14 \times 0,15^2}{4} = 19300 \text{ N}$$

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 28,3 \times 10^{-3}}{3,14 \times 0,2^2} = 0,90 \text{ m/s}$$

$$F_2 = P_2 \times S_2 = 1089,4 \times 10^3 \times \frac{3,14 \times 0,2^2}{4} = 34207 \text{ N}$$

$$d'où: \begin{cases} \bar{R}_x = 34308 - 19300 - 34207 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 10^3 \times 62,3 \times 10^{-3} \times 1,98 - 10^3 \times 34 \times 10^{-3} \times 1,92 \\ \quad - 10^3 \times 28,3 \times 10^{-3} \times 0,90 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -14579 \text{ N} \\ \bar{R}_z = -34207 \times \frac{1}{2} - 10^3 \times 28,3 \times 10^{-3} \times 0,9 \times \frac{1}{2} = -17116 \text{ N} \end{cases}$$

Le Té est soumis à une force \vec{R} telle que :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_z^2} = \sqrt{14579^2 + 17116^2} = 22483 \text{ N}$$

Sens des $x < 0$ et des $z < 0$

La droite d'action fait avec l'horizontale un angle $\theta = \text{arctg}\left(\frac{R_z}{R_x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{17116}{14579}\right) = 49,6^\circ$

