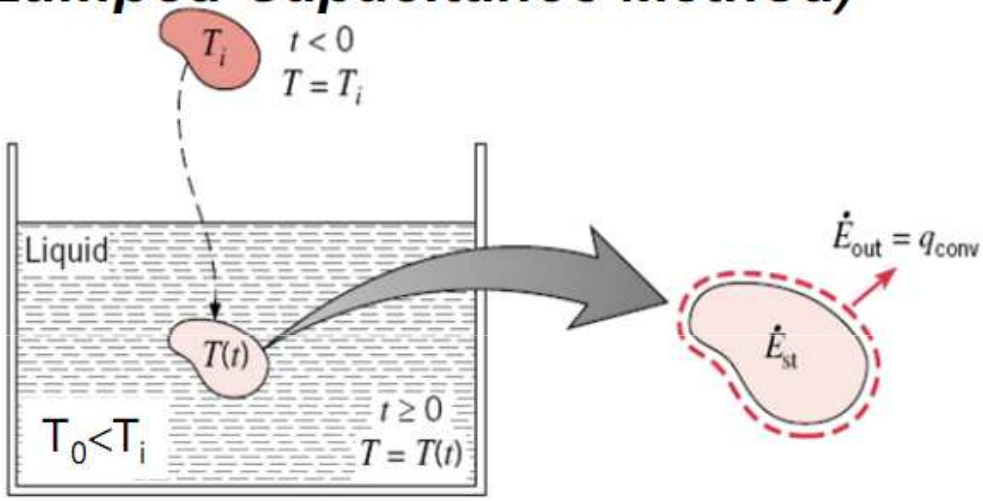
Ch. 1.4 : Conduction en régime transitoire

1. Approximation LCM (*Lumped Capacitance Method*)

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme , ce qui est à priori contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il se produise un transfert de chaleur. Cette approximation du milieu à température uniforme peut néanmoins être justifiée dans certains cas que l'on va préciser.



Considérons par exemple la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieure de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique est élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et t+dt

$$-hA_s\left(\mathrm{T(t)} - \mathrm{T_o}\right) = \rho\,\mathrm{Vc}\,\frac{\mathrm{dT}}{dt} \quad \text{Soit} \quad \frac{dT}{T(t)-T_o} = -\frac{hA_s}{\rho\,\mathrm{Vc}}$$

d'où:

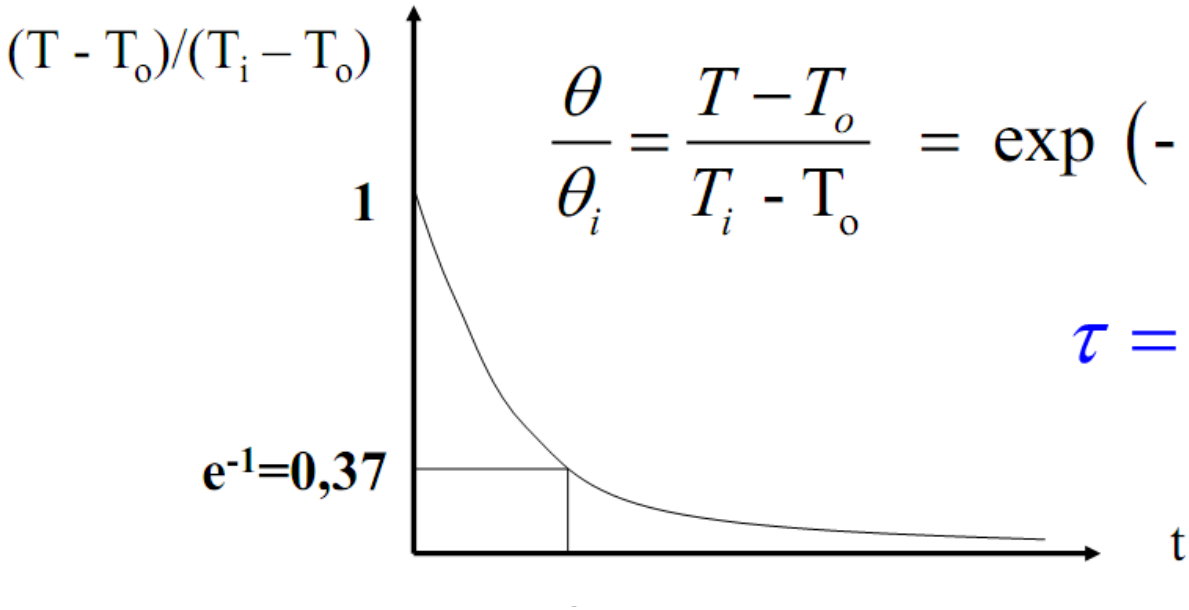
$$\frac{T(t) - \mathrm{T_o}}{\mathrm{T_i} - \mathrm{T_o}} = \exp\left(-\frac{hA_s}{\rho\,\mathrm{Vc}}\,\mathrm{t}\right)$$

Si on désire déterminer la température que le solide atteindra après un certains lapse de temps, on a:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\left(\frac{hA_s}{\rho Vc}\right)t\right)$$

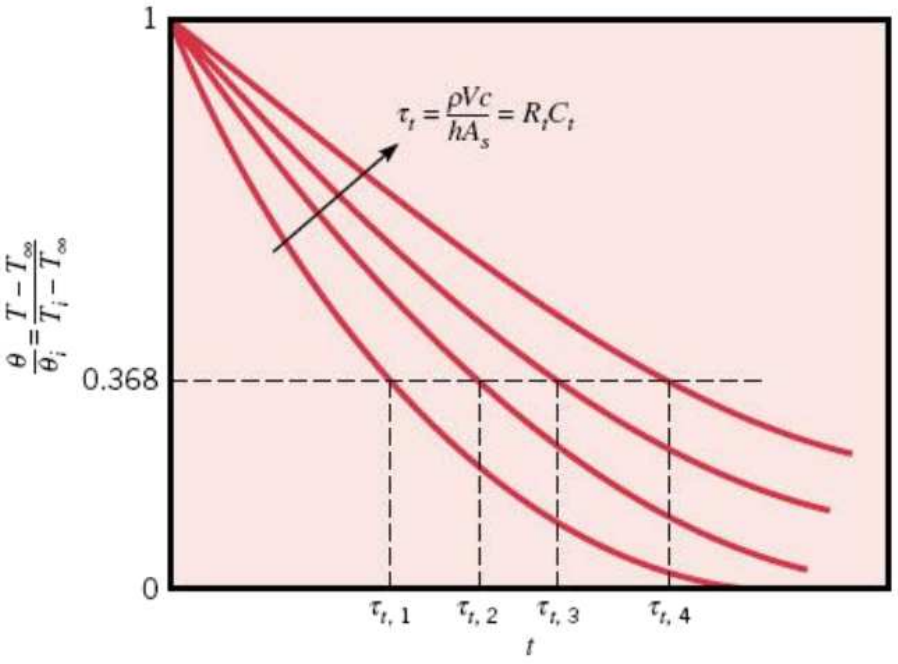
Par contre, si on désire connaître le temps requis pour qu'un solide atteigne une certaine température, on peut utiliser:

$$t = \frac{\rho Vc}{hA_s}\ln\left(\frac{\theta_i}{\theta}\right)$$



$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_o}{T_i - T_o} = \exp\left(-t/\tau\right)$$

$$\tau = \frac{\rho V c}{h A_s}$$



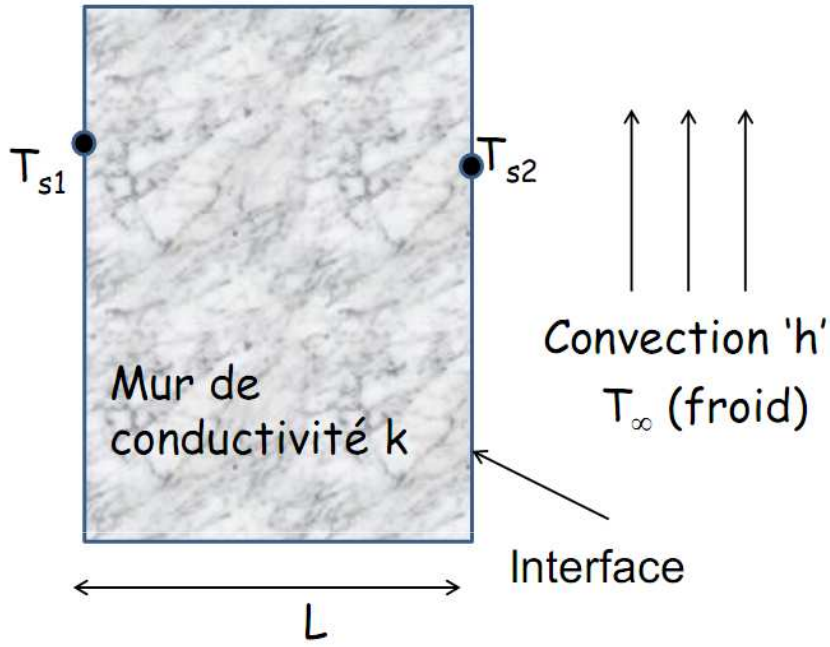
Quantité de chaleur échangée avec le milieu

$$Q = \int_0^t hA_s \underbrace{\left(\mathrm{T(t)} - \mathrm{T_o}\right)}_{\theta} \mathrm{dt} \quad or \quad \frac{\theta}{\theta_i} = \exp\left(- t/\tau\right)$$

$$Q = hA_s\theta_i \int_0^t \exp\left(- t/\tau\right)\mathrm{dt}$$

$$Q = \rho V c (T_i - T_0)\left[1 - \exp\left(- t/\tau\right)\right]$$

Validité de l'hypothèse d'une résistance thermique interne négligeable:Conduction dans un mur en régime permament

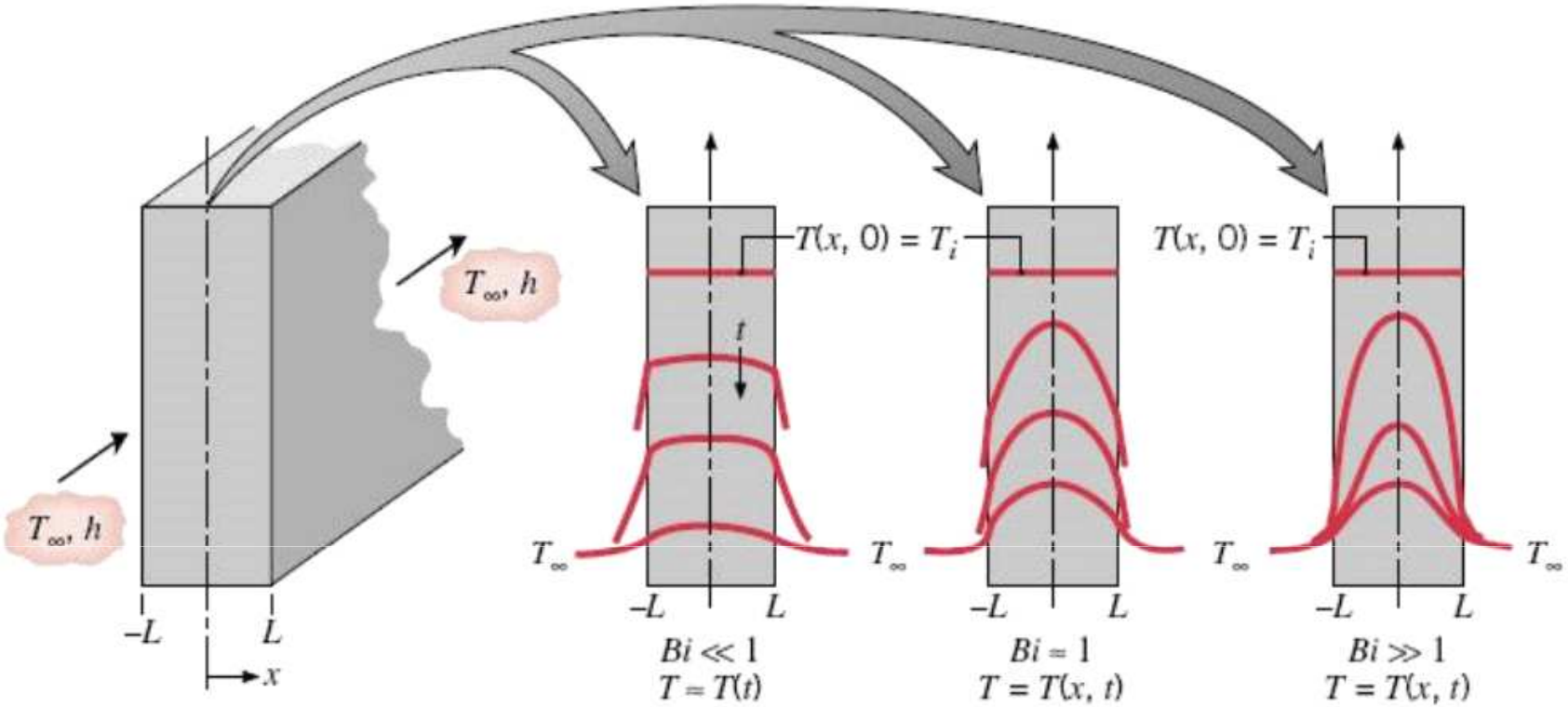


À l'interface: flux de conduction =flux de convection

$$k\frac{T_{s1}-T_{s2}}{L}=h\left(T_{s2}-T_{\infty}\right)\Rightarrow\frac{T_{s1}-T_{s2}}{\left(T_{s2}-T_{\infty}\right)}=\frac{hL}{k}=Bi=nombre\ de\ Biot$$

Si **Biot « 1** $\Rightarrow(T_{S1}-T_{S2}) \ll (T_{S2}-T\infty)$ On obtient un profil plat

Si **Biot » 1** $\Rightarrow(T_{S1}-T_{S2}) \gg (T_{S2}-T\infty)$ On ne peut plus négliger la conduction



Distribution de température dans un mur plan symétriquement refroidi par convection pour différentes valeur du nombre de Biot

Conseil pratique: En transitoire la première chose à faire:

Calculer le nombre de Biot=hL_c/k

Si **Biot** $\leq$ **0.1** $\Rightarrow$ conduction négligeable
T=T(t) uniquement et ne dépend pas de la position dans l'objet

Attention, ici on base le nombre de Biot sur une longueur caractéristique L_c . On base cette longueur caractéristique sur le rapport entre le volume du solide et l'aire en contact avec le fluide: $L_c = V / A_s$

Ainsi, pour un mur plan soumis à la même convection de part et d'autre, la longueur caractéristique sera *L/2*, tandis que pour un cylindre, elle sera de *r/2* tandis que pour une sphère, elle sera de *r/3*.

Remarque

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\left(\frac{hA_s}{\rho V c}\right)t\right)$$

$$\frac{hA_s}{\rho V c}\, t = \frac{ht}{\rho c V / A_s} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k}_{Bi} \cdot \frac{k}{\rho c}_{\alpha} \cdot \frac{t}{L_c^{\,2}}$$

$$\frac{hA_s}{\rho V c}\, t = Bi.\frac{\alpha t}{L_c^{\,2}} = Bi.Fo$$

Fo = nombre de Fourier = $\alpha\, t / L_c^2$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-Bi.Fo)$$

2. Généralisation

Rayonnement négligeable

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = q_s'' A_{s,h} - h\left(T - T_\infty\right) A_{s(c)} + \dot{E}_g$$

On pose $\theta = T - T_\infty$

On obtient: $\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0$

avec $a = hA_{s,c} \big/ \rho V c \quad et \quad b = (q_s'' A_{s,h} + \dot{E}_g) \big/ \rho V c$

D'où : $\frac{\theta}{\theta_i} = \exp(-at) + \frac{b/a}{\theta_i}[1 - \exp(-at)]$

3. Equation de diffusion de la chaleur en régime transitoire

3.1 mur plan

En géométrie cartésienne et avec k constant dans le cas d'un mur plan traité en 1D:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

où : $\alpha = k/\rho c$ Diffusivité thermique m^2/s

La solution analytique de cette équation si simple est la série infinie suivante:

où :

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo)\cos(\zeta_n x^*)$$

$$Fo = \text{nombre de Fourier} = \alpha\, t / L_c^2$$

$$C_n = \frac{4\sin(\zeta_n)}{2\zeta_n + \sin(2\zeta_n)}$$

$$\zeta_n \text{ racine de l'équation} : \zeta_n \tan\zeta_n = Bi$$

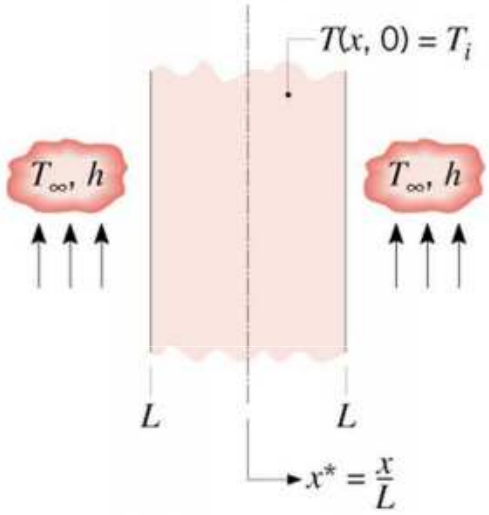
mur plan: *Solution à un terme (ordre 1)*

La solution approximative est donc (à l'ordre 1)

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)\cos(\zeta_1 x^*)$$

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}; x^* = \frac{x}{L}$$

$$\zeta_1 \tan \zeta_1 = Bi$$



La température à $x^*=0$ est donc

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \Rightarrow Fo = -\ln\left(\theta_0^* / C_1\right) / \zeta_1^2$$

ζ_1 et C_1 sont tabulées

TABLE 5.1 Coefficients used in the one-term approximation to the series solutions for transient one-dimensional conduction

	Plane Wall		Infinite Cylinder		Sphere	
Bi^a	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1723	1.0049	0.2440	1.0075	0.2991	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2218	1.0082	0.3143	1.0124	0.3854	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3709	1.0173	0.4551	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.0000

Énergie emmagasinée dans le mur:

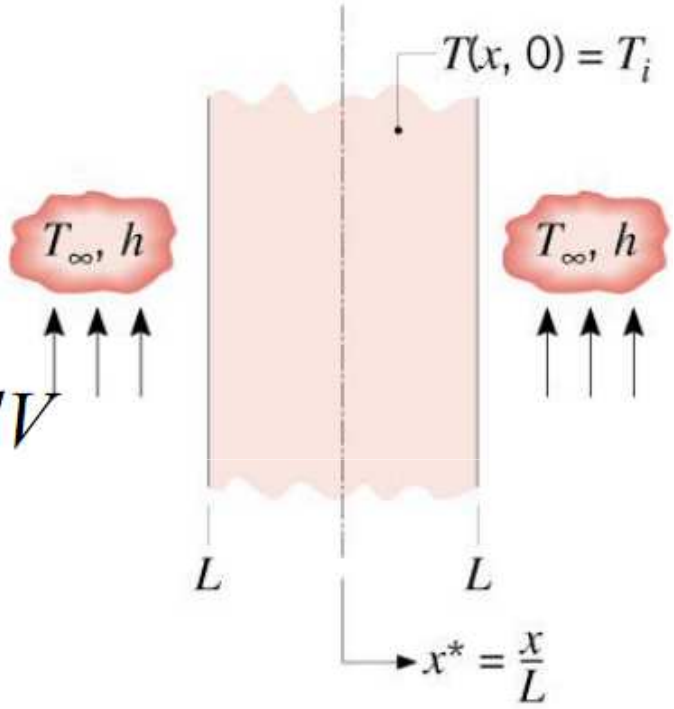
$$Q = \iiint_V \rho c[T_i - T(x,t)]dv$$

$$Q_{\max} = Q_o = \rho c V \left(T_i - T_\infty\right)$$

$$Q/Q_o = \frac{1}{V(T_i - T_\infty)} \iiint_V [T_i - T(x,t)]dV$$

$$Q/Q_o = \frac{A}{A2L} \int_{-L}^{+L} (1-\theta^*)dx$$

$$Q/Q_o = \left(1 - \frac{\sin\zeta_1}{\zeta_1}\theta_o^*\right)$$

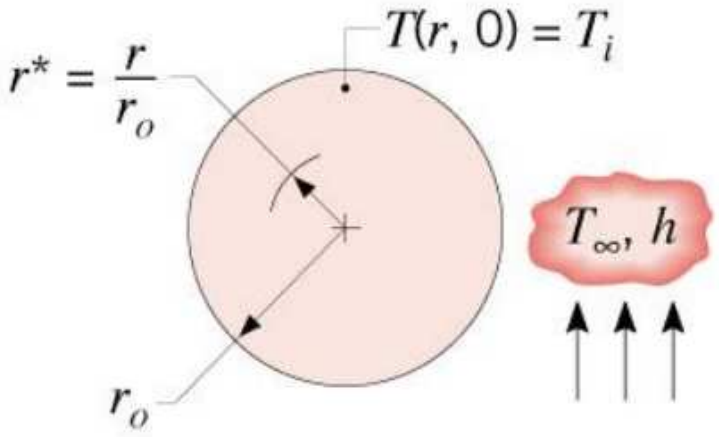


L'approximation à un terme pour le cylindre infini nous donne:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*)$$

$$C_1 = \frac{2}{\zeta_1} \frac{J_1(\zeta_1)}{J_0(\zeta_1)}$$

$$\zeta_1 \frac{J_1(\zeta_1)}{J_0(\zeta_1)} = Bi = \frac{hr_0}{k}$$



Les valeurs de J (fonctions de Bessel du premier ordre) sont tabulées à l'annexe B-4 tandis que ζ_1 et C_1 sont tabulées dans le tableau 5.1.

Attention: Dans *Bi* ci-dessus, on utilise r_0 et non $L_c = r_0/2$

Énergie emmagasinée dans le cylindre:

L'énergie emmagasinée dans le cylindre durant un intervalle de temps est donnée par:

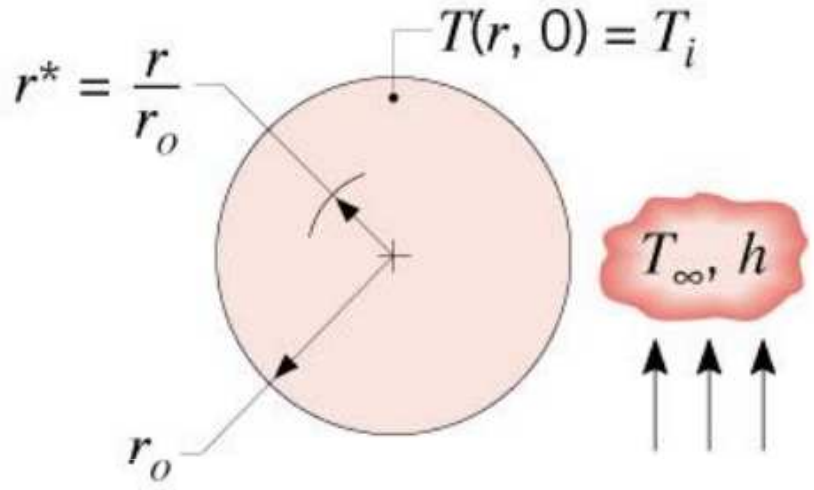
$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$

L'approximation à un terme pour la sphère nous donne:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)\frac{1}{\zeta_1 r^*}\sin(\zeta_1 r^*)$$

$$C_1 = \frac{4(\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1))}{2(\zeta_1) - \sin(2\zeta_1)}$$

$$1 - \zeta_1 \cot(\zeta_1) = Bi = \frac{hr_0}{k}$$



ζ_1 et C_1 sont tabulées dans le tableau 5.1.

Attention: Dans *Bi* ci-dessus, on utilise r_0 et non $L_c = r_0/3$

Énergie emmagasinée dans la sphère:

L'énergie emmagasinée dans la sphère durant un intervalle de temps est donnée par:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3}(\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1))$$

4. Solide semi infini

Cas 1: Température de surface imposée

Pour résoudre on utilise la théorie de la similarité

$$T(x,t) = T(\eta) \text{ avec } \eta = f(x,t)$$

2 variables 1 variable

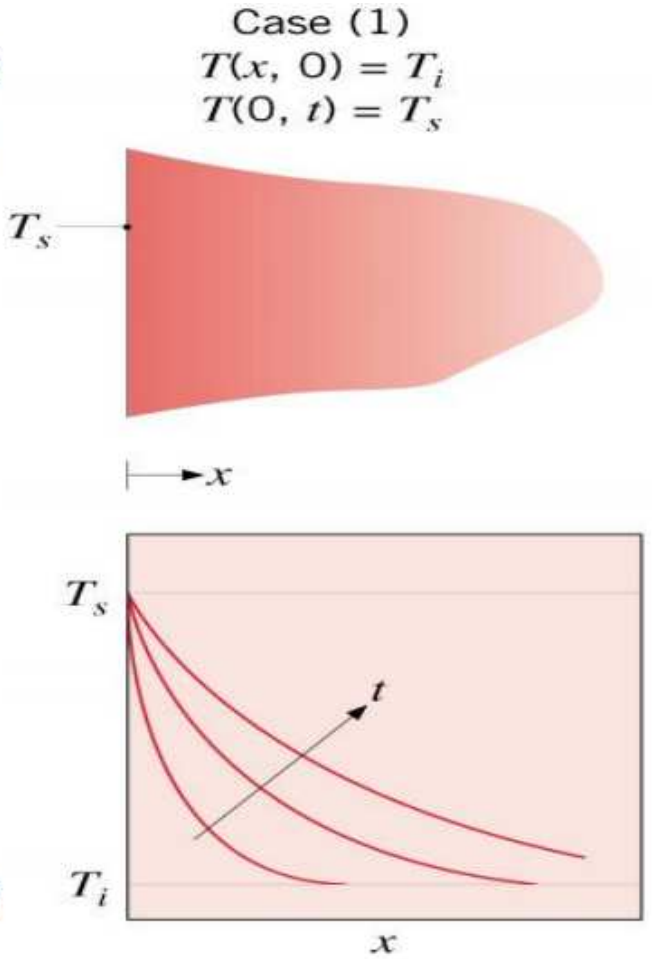
On appelle solution de similarité une solution pour laquelle la dépendance de deux variables (x et y) peut se réduire à celle d'une seule variable par l'application d'une transformation de similarité adéquate: $\eta = x/2\sqrt{\alpha t}$

$$\theta^* = \text{erf}(\eta)$$

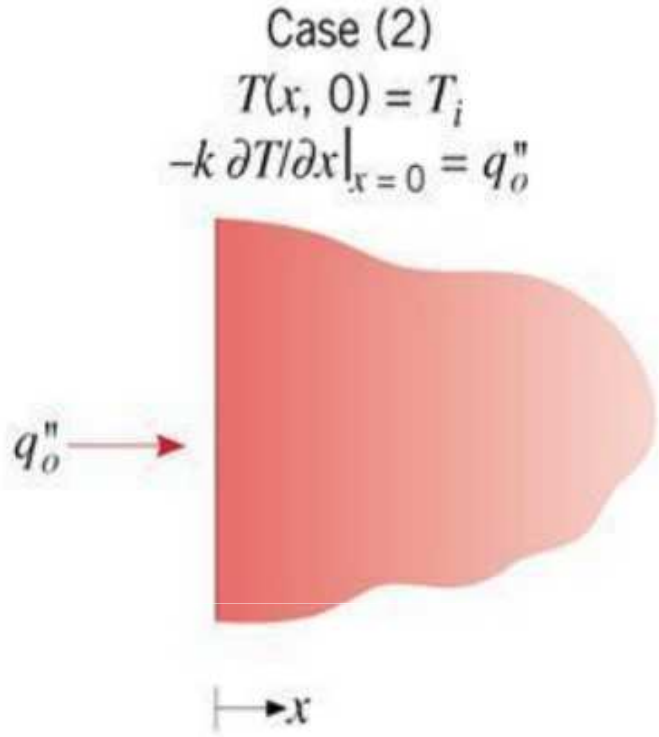
erf est la fonction erreur de Gauss. Ces valeurs sont tabulées à l'annexe B-2.

Finalement, le flux nous est donné par:

$$q''_s = k(T_s - T_i)/\sqrt{\pi\alpha t}$$



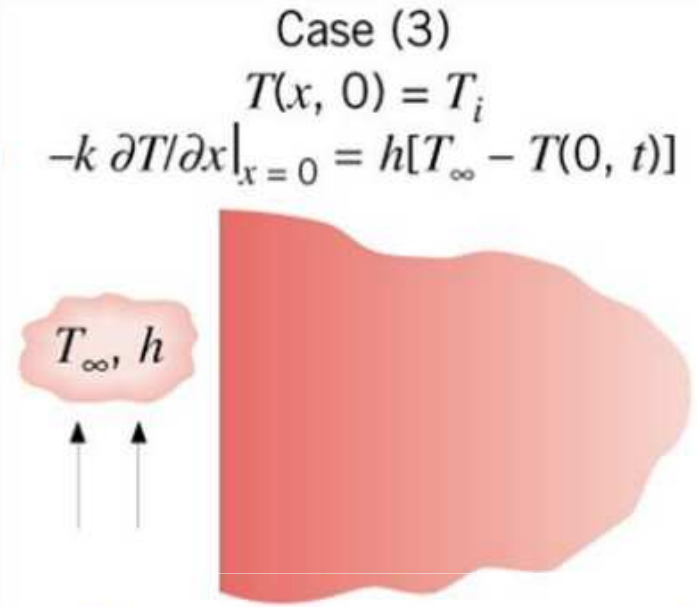
Cas 2: Flux de chaleur imposé



$$T(x,t) - T_i = \frac{2q''_o(\alpha t/\pi)^{1/2}}{k}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q''_o x}{k}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

Où erfc fonction erreur complémentaire=1-erf

Cas 3: Convection avec coefficient h



$$\frac{T(x,t)-T_i}{T_\infty-T_i} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)-\left[exp\left(\frac{hx}{k}+\frac{h^2\alpha t}{k^2}\right)\right]\left[erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}+\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]$$

Remarque

En pratique, on utilisera les solutions pour un milieu semi-infini quand le transfert de chaleur est limité à une faible épaisseur du matériau considéré (loin de la surface ... c'est l'infini

Exemple

Une jonction de thermocouple , qui peut être considérée comme une sphère, est utilisée pour mesurer la température dans un flux de gaz. Le coefficient d'échange convectif entre la jonction et le gaz est $h=400W/m^2.K$ et la jonction est caractérisée par sa conductivité $k=20W/m.K$ et sa capacité calorifique $C_p=400J/kg.K$ et sa masse volumique $\rho=8500kg/m^3$.

-Quel diamètre de jonction est nécessaire pour que le thermocouple ait une constante de temps d'une seconde ?

- Si la jonction est à 25°C et est placée dans le gaz à 200°C, à quel moment la jonction atteindra-t-elle 199°C ?