Ch. 1.3 : Conduction 2-D

Dans plusieurs situations pratiques, le transfert de chaleur par conduction n'est pas monodimensionnel. Il est bi- ou tridimensionnel. Différentes approches sont possibles :

-Analytique
-Graphique
-Numérique

Conduction 2-D :

En régime établi, la conduction 2-D dans un domaine rectangulaire avec conductivité constante et génération interne d'énergie :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}(x,y)}{k} = 0$$

Sans génération interne :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

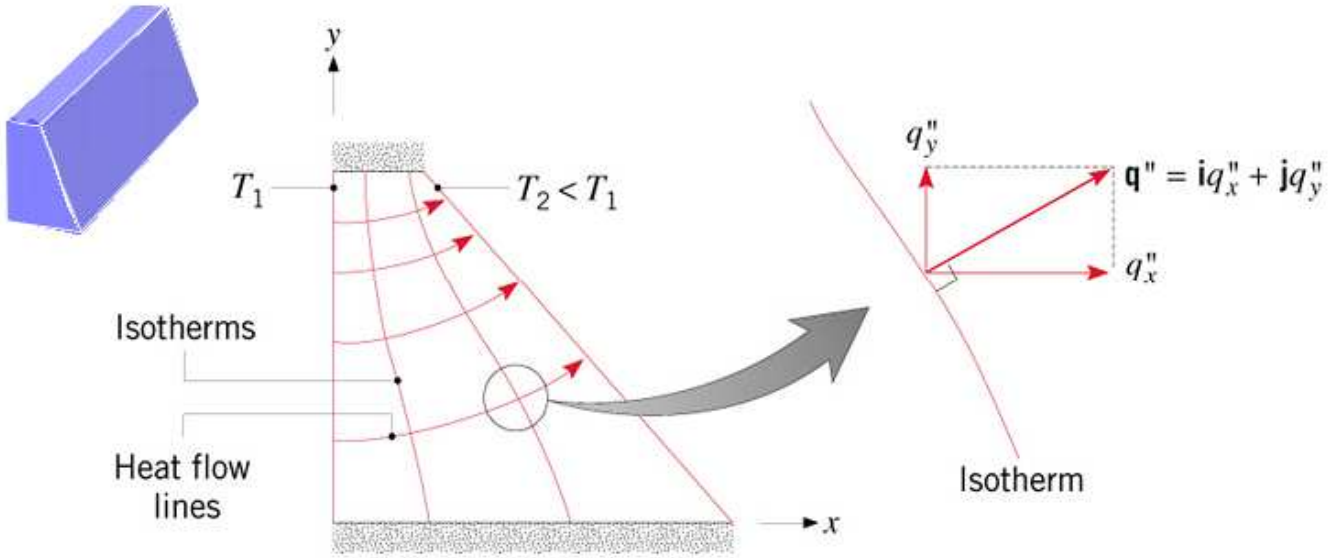
Méthodes de résolution :

- Méthode exacte analytique : séparation des variables, limitée à des géométries simples avec conditions aux limites.

-Méthode approximative graphique : sans génération interne d'énergie. Valeur limitée pour des considérations quantitatives. Aide rapide pour sens physique.

- Méthode approximative numérique : différences finies, éléments finis ou éléments frontières. C'est l'approche la plus utilisée et s'adapte à tous les niveaux de complexité.

Transfert de chaleur dans un long solide prismatique avec 2 surfaces isothermes et 2 surfaces isolées.

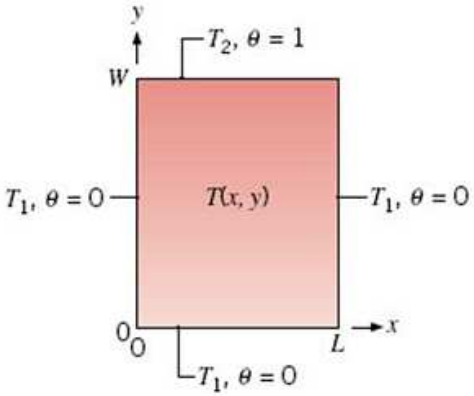


Méthode analytique : séparation des variables

Plaque mince plate (ou longue tige mince) avec trois faces maintenues à T_1 et une face à T_2

θ entre 0 et 1

Conditions aux limites : 0 ou 1

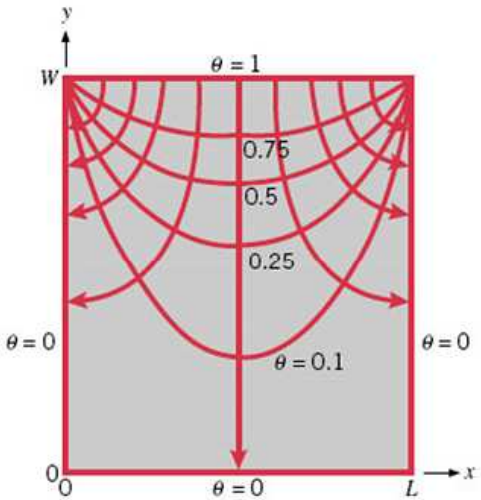


$$\theta = \frac{(T - T_1)}{(T_2 - T_1)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

Solution : séparation des variables

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$



$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$-\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0$$

Facteur de forme de la conduction

Dans les systèmes bi- ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2, on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme suivante:

$$q = Sk\left(T_1 - T_2\right)$$

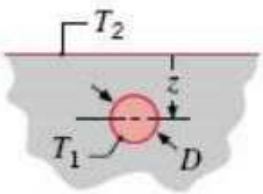
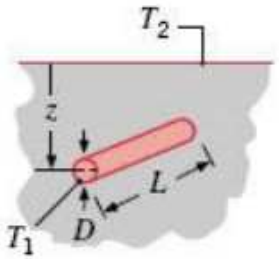
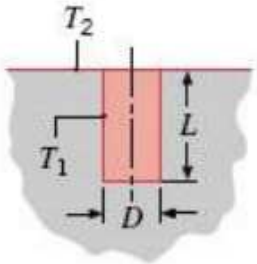
où S est appelé le facteur de forme de conduction

En terme de circuit-thermique, la résistance de conduction en 2D ou 3D est donc:

$$R_{cond(2D,3D)} = \left(Sk\right)^{-1}$$

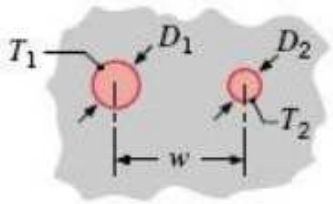
TABLE 4.1 Conduction shape factors and dimensionless conduction heat rates for selected systems.

(*a*) **Shape factors** $[q = Sk(T_1 - T_2)]$

System	Schematic	Restrictions	Shape Factor
Case 1 Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium		$z > D/2$	$\dfrac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Case 2 Horizontal isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\dfrac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Case 3 Vertical cylinder in a semi-infinite medium		$L \gg D$	$\dfrac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$

Case 4

Conduction between two cylinders of length L in infinite medium

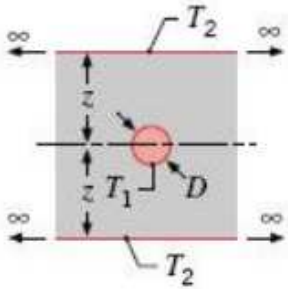


$L \gg D_1, D_2$
$L \gg w$

$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$$

Case 5

Horizontal circular cylinder of length L midway between parallel planes of equal length and infinite width

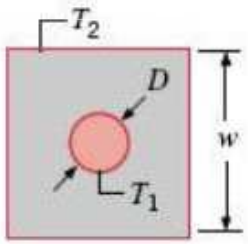


$z \gg D/2$
$L \gg z$

$$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$$

Case 6

Circular cylinder of length L centered in a square solid of equal length

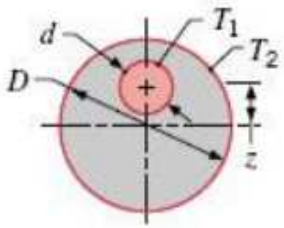


$w > D$
$L \gg w$

$$\frac{2\pi L}{\ln(1.08\, w/D)}$$

Case 7

Eccentric circular cylinder of length L in a cylinder of equal length

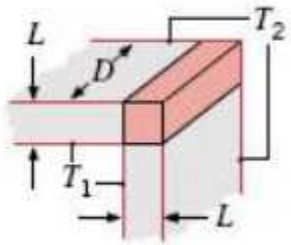


$D > d$
$L \gg D$

$$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$$

Case 8

Conduction through the edge of adjoining walls

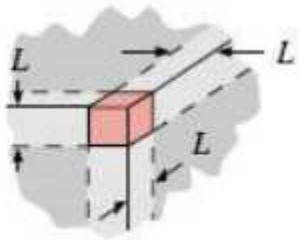


$D > 5L$

$0.54D$

Case 9

Conduction through corner of three walls with a temperature difference ΔT_{1-2} across the walls

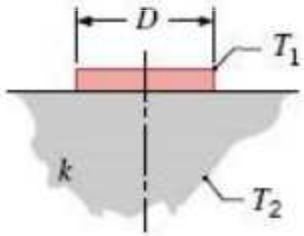


$L \ll$ length and width of wall

$0.15L$

Case 10

Disk of diameter D and temperature T_1 on a semi-infinite medium of thermal conductivity k and temperature T_2

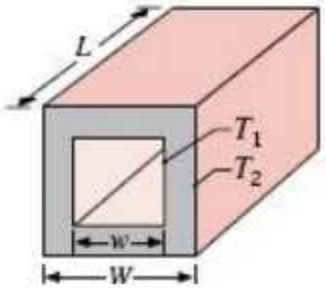


None

$2D$

Case 11

Square channel of length L



$\frac{W}{w} < 1.4$ $\qquad \frac{2\pi L}{0.785 \ln (W/w)}$

$\frac{W}{w} > 1.4$ $\qquad \frac{2\pi L}{0.930 \ln (W/w) - 0.050}$

$L \gg W$

Exemple :

Des déchets radioactifs générant de la chaleur se trouvent stockés dans un conteneur sphérique de diamètre D=2m et dont le centre se situe à 10m de profondeur dans le sol. Sachant que le sol à 300K a une conductivité de 0,52W/m.K et que la génération de chaleur ce fait à 500W, quelle est la température de surface du conteneur?