Partie 1 : Initiation au transfert de chaleur par conduction

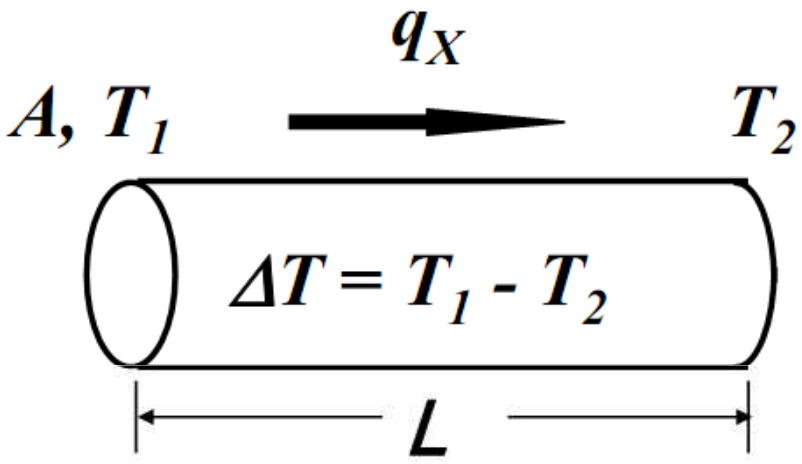
Ch1 : Introduction à la conduction

1. Loi de Fourier

$$q_x = kA\frac{\Delta T}{L}$$

$$\lim_{L\to 0} \rightarrow q_x = -kA\nabla T$$

$$q''_x = -k\nabla T$$



où :

T: Température [K ou °C]

L : Longueur [m]

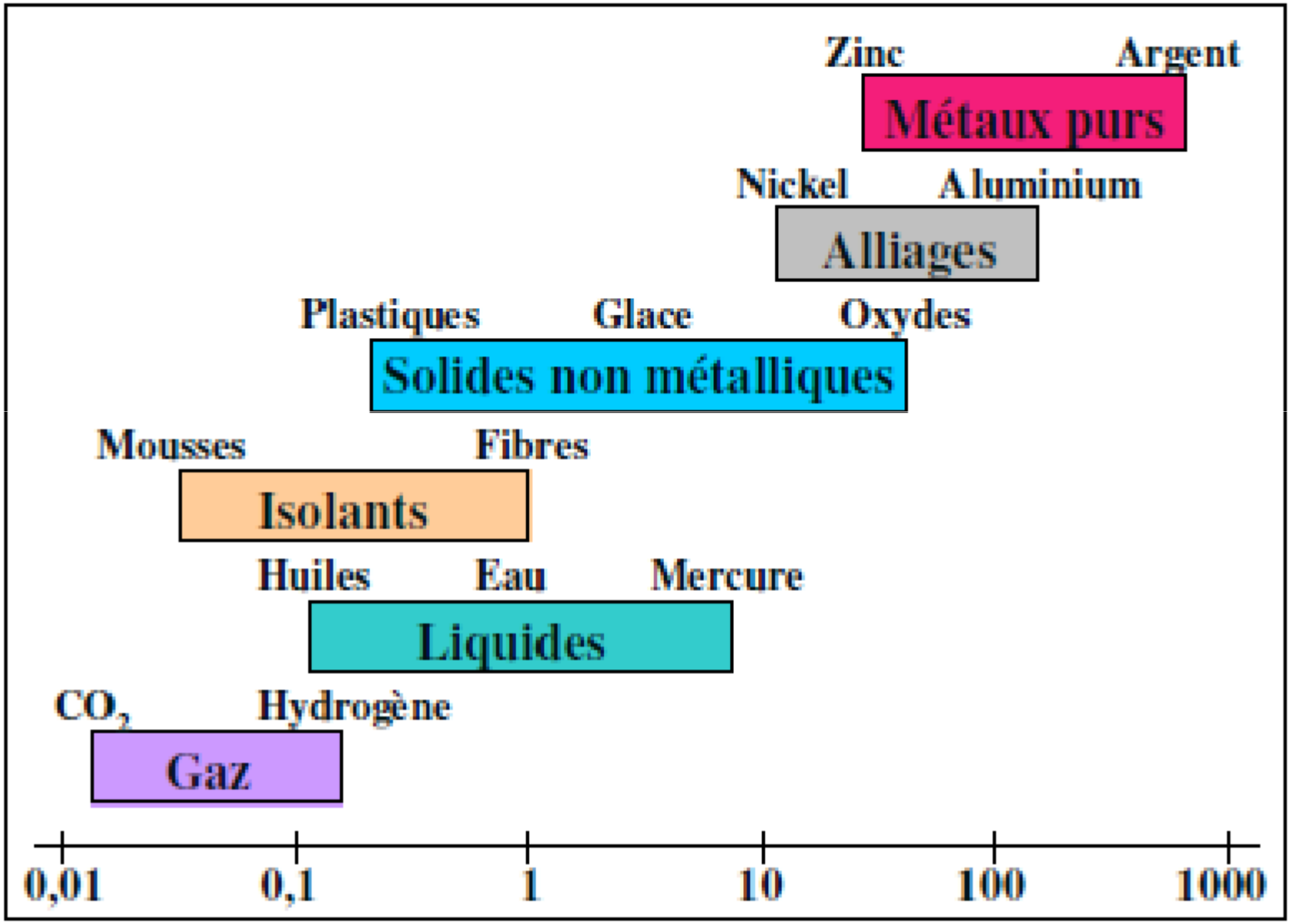
q_x : Flux de chaleur [W]

q''_x : Densité de flux de chaleur [W/m²]

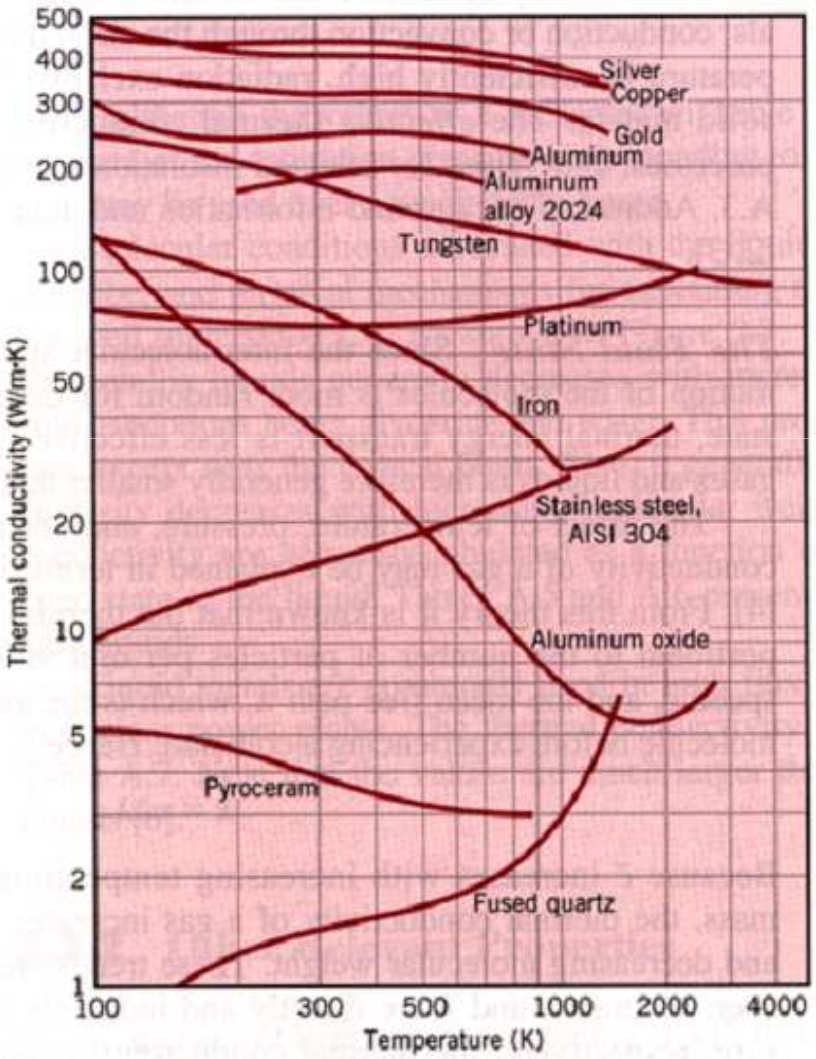
k : Conductivité thermique [W/m K]

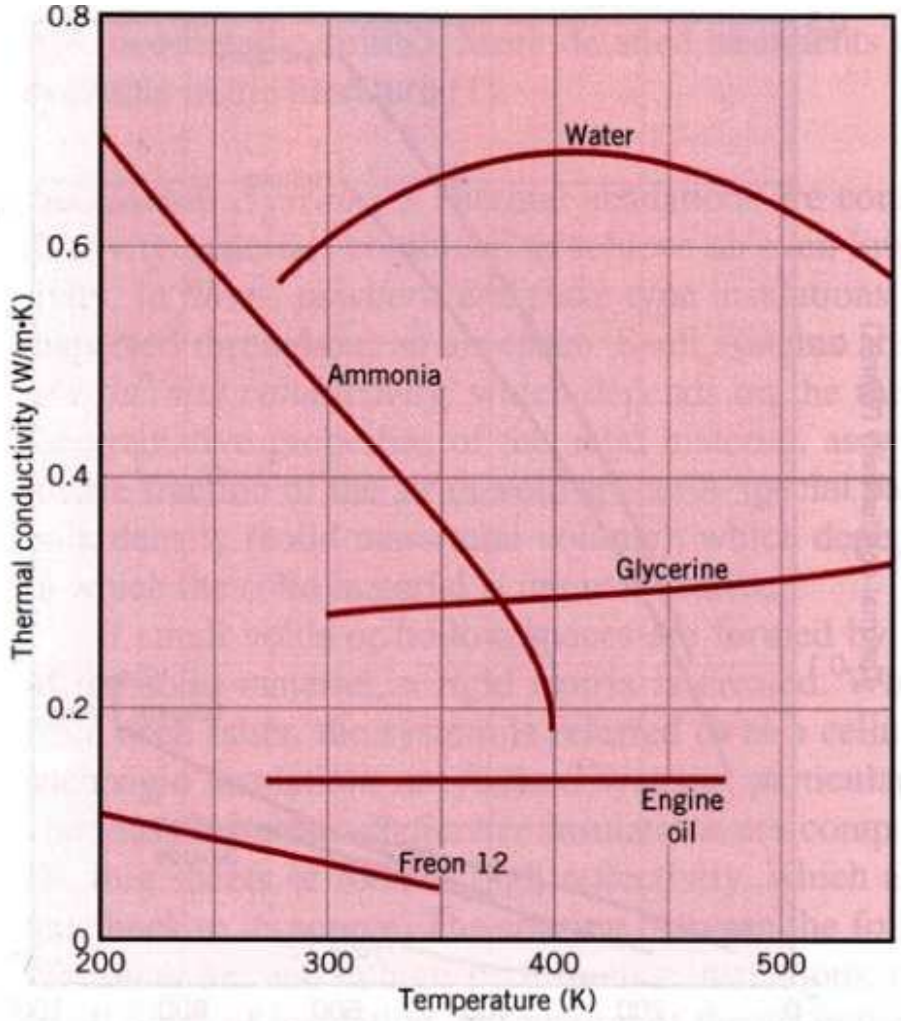
A: Aire de passage de la chaleur [m²]

2. Conductivité thermique, propriété du matériau



La conductivité thermique dépend de la température pour la plupart des matériaux





3. Equation de diffusion de la chaleur

La solution de l'équation de diffusion de chaleur (équation de conservation d'énergie thermique) permet de déterminer la distribution des températures au sein de solides opaques et donc de déterminer les puissances transférées par conduction dans toutes les directions.

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

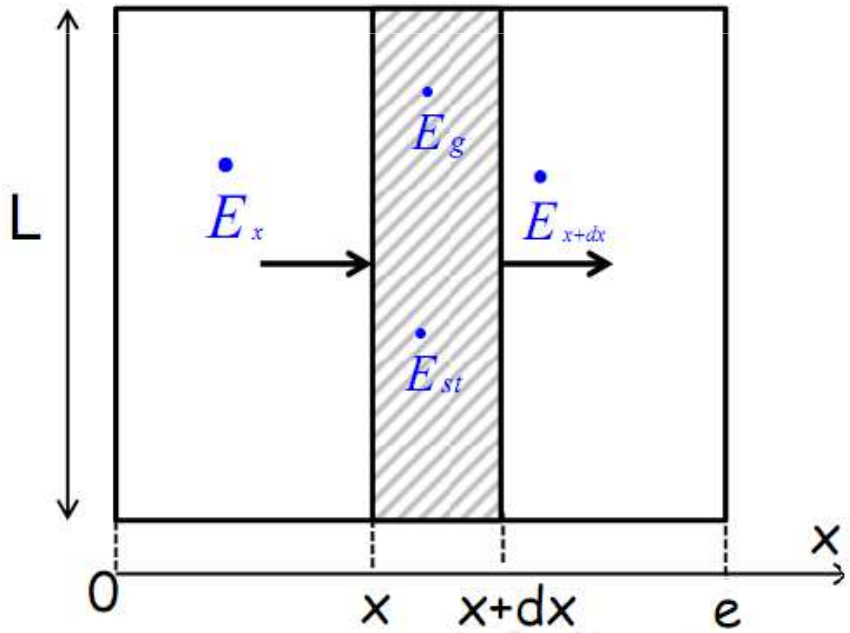
$$\dot{E}_x + \dot{E}_g = \dot{E}_{x+dx} + \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_x = q_x = -kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$$

$$\dot{E}_{x+dx} = q_{x+dx} = -kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\dot{E}_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho A dx C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\dot{E}_g = \dot{q}\, A dx$$



D'où:

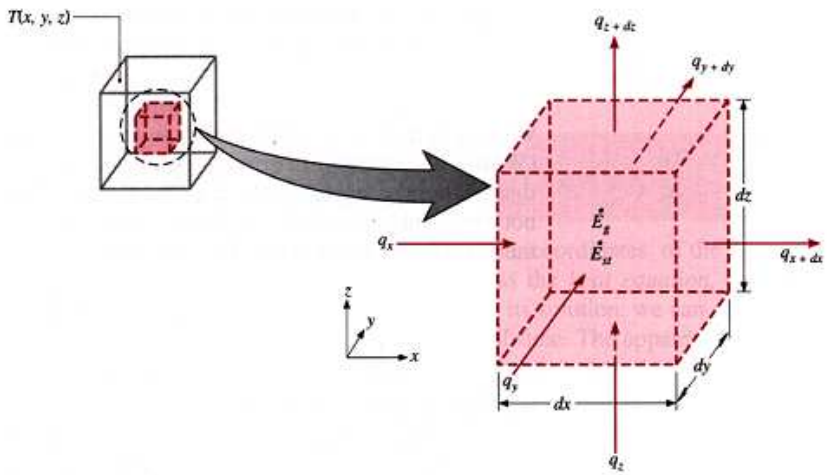
$$-kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + \dot{q}\,Adx = -kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} + \rho AdxC_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x}{dx} + \dot{q} = \rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} = \rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

En coordonnées cartésiennes

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :



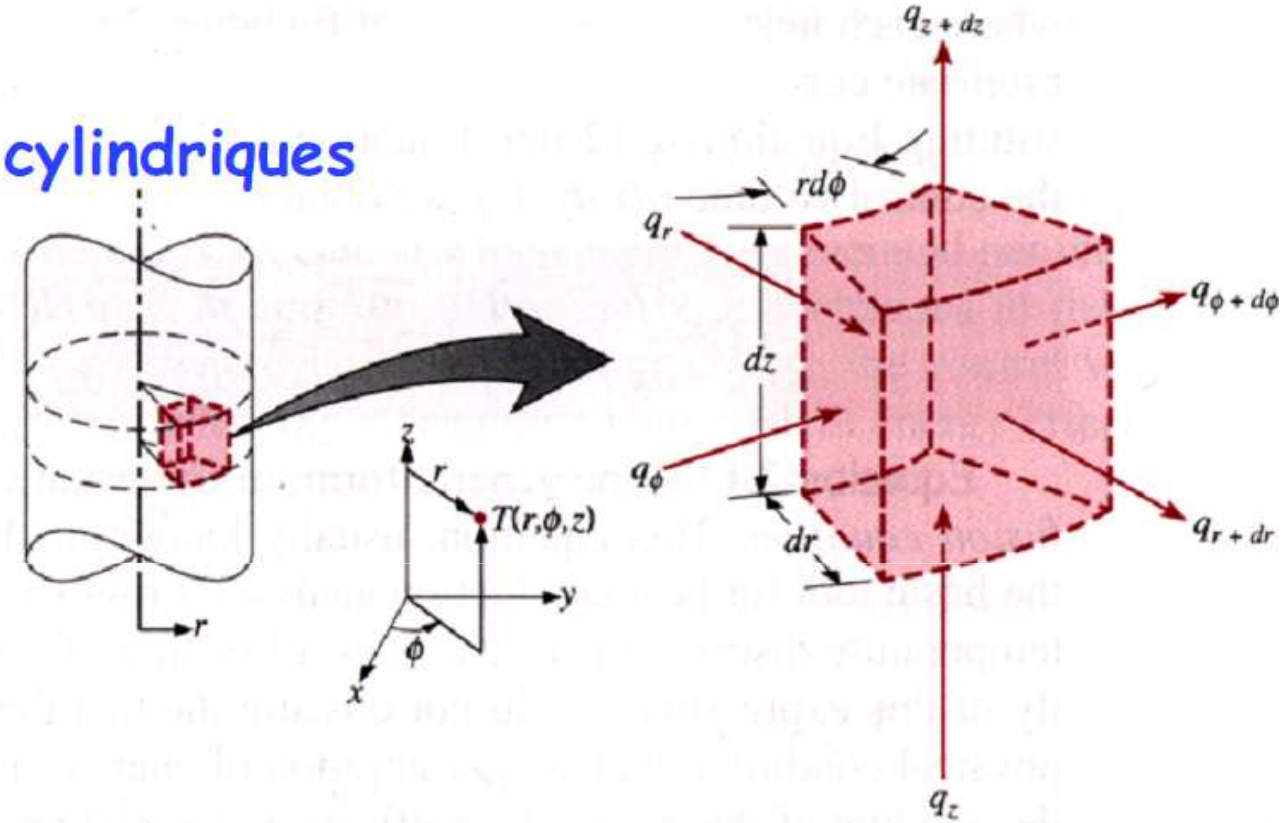
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

Terme source

Taux d'accumulation d'énergie thermique

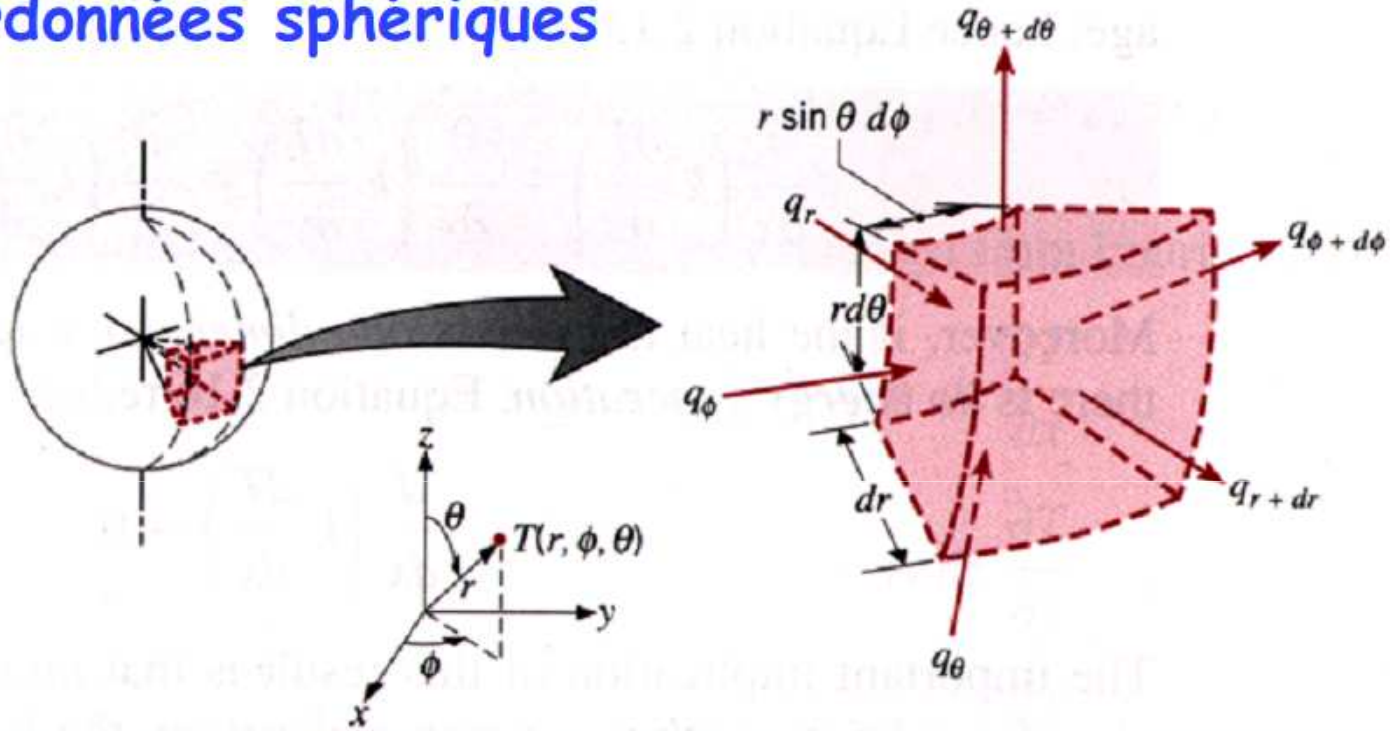
$$en\ \left[W/m^3\right]$$

En coordonnées cylindriques



$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

En coordonnées sphériques



$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)+\dot{q}=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

4. Conditions aux frontières et initiales

Pour déterminer la distribution de température dans un milieu, il faut spécifier les conditions aux frontières.

En régime transitoire, il faut spécifier les conditions initiales (à t=0)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

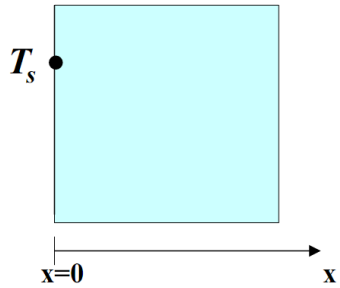
Équation du second ordre par rapport à x, y et z et du premier ordre par rapport à t. Il faut donc :

-2 conditions frontières sur x
-2 conditions frontières sur y
-2 conditions frontières sur z
-1 condition initiale sur t

Condition frontière de type Dirichlet:

- Température *T* imposée

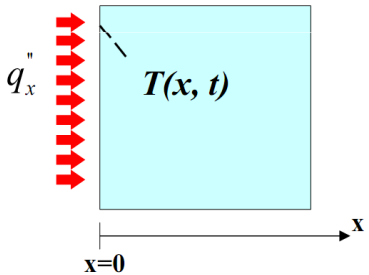
$$T(0,t)=T_s$$



Condition frontière de type Neumann:

- Flux de chaleur *q''* imposé

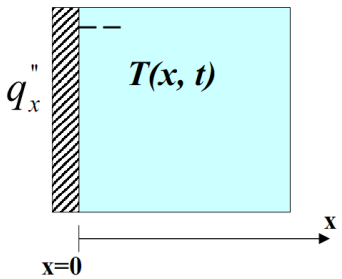
$$q''_x=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=o}$$



Condition frontière de type Neumann:

- Cas spécial où la frontière est isolée

$$q''_x=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=o}\equiv 0$$



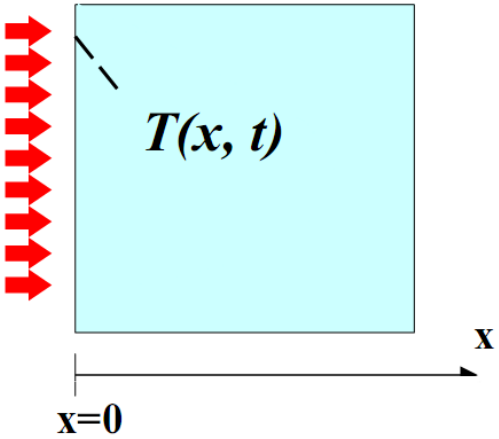
Condition frontière de type mixte:

1. Flux de chaleur ***q" provenant de la convection***
2. *Flux de chaleur **q" provenant du rayonnement***
3. *Flux de chaleur **q" combiné***

$$q_x'' = h(T - T_\infty)$$

$$q_x'' = \sigma(\varepsilon T_s^4 - \alpha T_\infty^4)$$

$$q_x'' = h(T - T_\infty) + \sigma(\varepsilon T_s^4 - T_\infty^4)$$



Exemple de calcul (2.2)

La distribution de température dans un mur de *1 m* à un certain temps *t* est donnée par:

$$T(x,t_0) = a + bx + cx^2$$

Avec *a = 900 °C, b = -300 °C/m* et *C = -50 °C/m²*. De plus, une source de *1000 W/m³* est présente à l'intérieur d'un mur de 10 *m²* d'aire. Ce mur possède les propriétés suivantes:

$$\rho = 1600 kg/m^3, k = 40 W/mK, C_p = 4000 J/kgK$$

1. Déterminez le taux de transfert de chaleur (flux) entrant (*x = 0*) et sortant (*x = 1*).
2. Déterminez le taux d'accumulation d'énergie dans le mur en Watts.
3. Déterminez la variation temporelle de la température.